Sveučilište u Zagrebu
PMF–Matematički odjel

Filip Nikšić

PROPOZICIONALNA DINAMIČKA LOGIKA

Diplomski rad

Zagreb, listopad 2009.

Sveučilište u Zagrebu
PMF–Matematički odjel

Filip Nikšić

PROPOZICIONALNA DINAMIČKA LOGIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, listopad 2009.

Sadržaj

Uvod

Ideja formalnih logičkih sustava za rasuđivanje o korektnosti računalnih programa potječe još iz 1960-ih godina. Jedan od takvih sustava poznat kao Hoareova ili Floyd-Hoareova logika predložio je 1969. C. A. R. Hoare, a sličan sustav dao je prije njega i R. Floyd. U Hoareovoj logici programi su predočeni kao svojevrsni logički veznici koji se mogu kombinirati u složenije veznike.

U sklopu kolegija o semantici programa V. Pratt je 1974. ideje Hoareove logike pretočio u kontekst modalne logike i time uveo dinamičku logiku. Iz materijala s predavanja napisao je članak [17] koji je objavljen 1976. U dinamičkoj logici programi su reprezentirani kao modalni operatori, a nivo rasuđivanja analogan je logici prvog reda.

Potaknuti Prattovim radom, M. Fischer i R. Ladner su u članku [7] definirali propozicionalnu varijantu dinamičke logike. Ona je u odnosu prema dinamičkoj logici kao klasična logika sudova (propozicionalna logika) prema logici prvog reda. Iako je izražajno slabija, još uvijek je pogodna za rasuđivanje o računalnim programima, a primjenu je našla i u drugim područjima poput lingvistike, filozofije i umjetne inteligencije.

Propozicionalna dinamička logika glavna je tema ovog diplomskog rada. Međutim, cilj nije dati pregled njenih brojnih primjena. Ona nas zanima prvenstveno kao primjer logike koja ima određenu strukturu na skupu modalnih operatora. Iz te strukture proizlaze zanimljiva svojstva, a glavni cilj ovog rada je demonstrirati ona osnovna, kao i tehnike kojima se do njih dolazi.

Diplomski rad podijeljen je na četiri poglavlja. U prvom poglavlju uvode se osnovni pojmovi. Definira se jezik propozicionalne dinamičke logike, uvodi se semantika okvira i modela i razmatra se važan alat u modalnoj logici—filtracije. Dokazuju se osnovni rezultati vezani uz uvedene koncepte.

Drugo poglavlje posvećeno je uspostavljanju veze između propozicionalne dinamičke logike i određene klase relacijskih struktura, tzv. regularnih okvira. Pokazuje se da je propozicionalna dinamička logike adekvatna i slabo potpuna u odnosu na klasu regularnih okvira. Osim toga, razmatra se zašto ne vrijedi i jaka potpunost.

U trećem poglavlju analizira se problem ispunjivosti propozicionalne dinamičke logike. Pokazuje se da je problem odlučiv, a određuje se i njegova složenost. Naime, taj problem spada u klasu EXPTIME-potpunih problema.

U završnom poglavlju daje se pregled varijanti propozicionalne dinamičke logike koje nastaju sintaktičkim i semantičkim modifikacijama. U sintaktičke spada obogaćivanje jezika, a u semantičke ograničavanje klase struktura koje razmatramo. U završnom poglavlju spominje se i jedan otvoren problem vezan uz propozicionalnu dinamičku logiku: problem Craigove interpolacije.

Bibliografija sadrži reference na temelju kojih je nastao diplomski rad. Osnovna referenca je knjiga [4]. Odličan pregledni članak o propozicionalnoj dinamičkoj logici može se naći na Internetu [1]. Za teoriju izračunljivosti i složenosti glavna referenca je [19], a problem Craigove interpolacije razmatra se u [13]. Bibliografija sadrži i reference koje nisu direktno korištene, a mogle bi biti zanimljive čitatelju.

Na kraju ovog uvoda koristim priliku da se zahvalim mentoru, doc. dr. sc. Mladenu Vukoviću, na pomoći pri izboru teme, ustupljenoj literaturi, kvalitetnim savjetima te, prije svega, na iznimno dobrim i zanimljivim predavanjima koja su u meni pobudila interes za matematičku logiku. Zahvaljujem se i kolegama logičarima na motivirajućem ozračju koje stvaraju, a i svim čitateljima koji odluče posvetiti svoje vrijeme ovom diplomskom radu.

POGLAVLJE 1

Osnovne definicije i rezultati

U naše istraživanje modalnih logika i posebno propozicionalne dinamičke logike krećemo definiranjem modalnih jezika. Prvo definiramo *osnovni modalni jezik*, koji zatim generaliziramo kako bismo dobili *jezik propozicionalne dinamičke logike*.

U drugom odlomku definiramo *modalne* i *normalne modalne logike*, skupove modalnih formula koji sadrže određene formule—aksiome i zadovoljavaju određene uvjete zatvorenja. Propozicionalna dinamička logika (**PDL**) je jedna konkretna normalna modalna logika koju u ovom odlomku također definiramo.

Modalnim jezicima dajemo smisao u trećem odlomku, povezujući ih s relacijskim strukturama. Uvodimo dva nivoa na kojima modalni jezici „pričaju" o strukturama: nivo *modela* i nivo *okvira*. Uz modele veže se pojam *istinitosti*, a uz okvire pojam *valjanosti* formula.

U trećem odlomku također uvodimo posebnu klasu okvira, tzv. regularne okvire. Jedan od ciljeva u ostatku rada bit će uspostaviti vezu između sintaktičke karakterizacije **PDL** iz drugog odlomka i semantičke karakterizacije u vidu regularnih okvira. Naime, vidjet ćemo da je **PDL** upravo logika klase regularnih okvira.

Na kraju poglavlja bavimo se važnim alatom teorije modela modalne logike—filtracijama. One nam omogućuju da iz već postojećih modela konstruiramo nove, sa svojstvima koja polaznim modelima nedostaju (npr. konačnost, što će biti važno u trećem poglavlju).

1 Modalni jezik

Jezici propozicionalne modalne logike su jezici logike sudova obogaćeni tzv. *modalnim operatorima* ili modalnostima. Iako su na prvi pogled tek neznatno komplicираniji, izražajnost im je vrlo velika. Čak tolika da je u osnovnom modalnom jeziku moguće izraziti svojstva koja se ne mogu izraziti u logici prvog reda.

Najjednostavniji modalni jezik dobijemo kad jeziku logike sudova dodamo jedan unarni modalni operator:

Definicija 1.1. *Osnovni modalni jezik* čine skup *propozicionalnih varijabli* Φ čije elemente označavamo s p, q, r, itd. te unarni modalni operator $\Diamond$ (engl. *diamond*). Formula ϕ osnovnog modalnog jezika dana je produkcijskim pravilom

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi,$$

pri čemu p prolazi po elementima od Φ. Skup svih formula označavamo s $Form_0$, ili s $Form_0(\Phi)$ kad želimo naglasiti koji skup propozicionalnih varijabli koristimo.

Uvodimo i dualni operator $\Box$ (engl. *box*) definiran s $\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi$, te uobičajene pokrate za konstantu istine, konjunkciju, kondicional i bikondicional:

$$\begin{aligned} \top &:= \neg\bot, & \phi \to \psi &:= \neg\phi \vee \psi, \\ \phi \wedge \psi &:= \neg(\neg\phi \vee \neg\psi), & \phi \leftrightarrow \psi &:= (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi). \end{aligned}$$

Napomenimo da, iako ne specificiramo kardinalni broj $\mathsf{card}(\Phi)$ skupa propozicionalnih varijabli, u ostatku teksta smatramo da je taj skup prebrojiv. U slučaju da nam negdje kao pretpostavka treba npr. konačan skup propozicionalnih varijabli, to ćemo posebno naglasiti.

Formulu $\Diamond\phi$ možemo čitati na nekoliko načina. Jedan od njih je „moguće je ϕ". U tom slučaju, $\Box\phi$ se čita „nužno je ϕ". U logici znanja formula $\Box\phi$ bi se čitala „agent zna ϕ" (u toj logici se obično umjesto simbola $\Box$ koristi slovo K). U logici dokazivosti $\Box\phi$ se čita „dokazivo je ϕ".

Osnovni modalni jezik možemo generalizirati u dva pravca. Prvi je dozvoliti proizvoljan broj modalnih operatora. Drugi je dozvoliti modalne operatore različitih *mjesnosti* (broja argumenata na koje se odnose). Budući da se jezik propozicionalne dinamičke logike sastoji samo od unarnih modalnih operatora, nećemo se previše zamarati definiranjem općeg modalnog jezika. Međutim, valja napomenuti da svi rezultati koji nisu usko vezani za propozicionalnu dinamičku logiku vrijede i za takav opći modalni jezik.

Definicija 1.2. Neka Π_0 konačan ili prebrojiv skup čije elemente zovemo *osnovni programi*, a označavamo s a, b, c itd. Skup *programa* Π dan je produkcijskim pravilom:

$$\pi ::= a \mid \pi_1 \circ \pi_2 \mid \pi_1 \cup \pi_2 \mid \pi^*,$$

pri čemu a prolazi skupom Π_0.

Jezik propozicionalne dinamičke logike sastoji se od skupa propozicionalnih varijabli Φ i od skupa unarnih modalnih operatora $\{\langle\pi\rangle \mid \pi \in \Pi\}$ indeksiranih skupom programa Π.

Formula ϕ u ovom jeziku dana je produkcijskim pravilom:

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \langle\pi\rangle\phi,$$

pri čemu p prolazi skupom Φ, a π skupom Π. Skup svih formula jezika propozicionalne dinamičke logike označavamo s $Form_{PDL}$, ili s $Form_{PDL}(\Phi)$ kad želimo naglasiti koji skup propozicionalnih varijabli koristimo.

Kao i kod osnovnog modalnog jezika, uvodimo uobičajene pokrate za konjunkciju ($\wedge$), kondicional ($\rightarrow$), bikondicional ($\leftrightarrow$) i logičku konstantu $\top$. Uvodimo i dualne modalne operatore: za modalni operator $\langle\pi\rangle$ uvodimo operator $[\pi]$.

Intuitivnu ideju jezika propozicionalne dinamičke logike možemo shvatiti tako da zamislimo računalo kao skup stanja određenih primjerice sadržajem svih memorijskih lokacija i procesorskih registara, i skup programa koji omogućuju prelazak iz jednog stanja u drugo. Na raspolaganju imamo osnovne programe koje možemo kombinirati kako bismo dobili složenije, a dozvoljeni su nam sljedeći *programski konstruktori*:

izbor Ako su π_1 i π_2 programi, onda je i $\pi_1 \cup \pi_2$ program. ($\pi_1 \cup \pi_2$ nedeterministički izvodi π_1 ili π_2.)

kompozicija Ako su π_1 i π_2 programi, onda je i $\pi_1 \circ \pi_2$ program. ($\pi_1 \circ \pi_2$ prvo izvodi π_1, a onda π_2.)

iteracija Ako je π program, onda je i π^* program. (π^* izvodi program π konačan broj puta (može i nula puta).)

U skladu s tim, formulu $\langle\pi\rangle\phi$ bismo mogli čitati kao „neko izvođenje programa π iz trenutnog stanja vodi u stanje u kojem je ϕ istinita". Interpretacija formule s dualnim oparatorom $[\pi]\phi$ tada bi bila „svako izvođenje programa π iz trenutnog stanja vodi u stanje u kojem je ϕ istinita".

Na kraju ovog odlomka definiramo još *uniformnu supstituciju.* Definiciju dajemo za jezik propozicionalne dinamičke logike. Jasno je kako bismo je reducirali na osnovni modalni jezik.

Definicija 1.3. Neka je Φ skup propozicionalnih varijabli. *Supstitucija* je svaka funkcija $\sigma\colon \Phi \to Form_{PDL}(\Phi)$.

Supstitucija σ inducira funkciju $(\cdot)^\sigma\colon Form_{PDL}(\Phi) \to Form_{PDL}(\Phi)$, definiranu rekurzivno:

$$\begin{aligned} p^\sigma &:= \sigma(p), \\ \bot^\sigma &:= \bot, \\ (\neg\phi)^\sigma &:= \neg\phi^\sigma, \\ (\phi \vee \psi)^\sigma &:= \phi^\sigma \vee \psi^\sigma, \\ (\langle\pi\rangle\phi)^\sigma &:= \langle\pi\rangle\phi^\sigma, \end{aligned}$$

za sve $p \in \Phi$, formule ϕ, ψ i programe $\pi \in \Pi$. Takvu funkciju zovemo *uniformna supstitucija.*

Kažemo da je χ *supstitucijska instanca* formule ϕ ako postoji supstitucija τ takva da je $\phi^\tau = \chi$.

2 Modalne i normalne modalne logike

Definicija 2.1. *Modalna logika* Λ je skup modalnih formula koji sadrži sve tautologije logike sudova i zatvoren je na *modus ponens* (ako su ϕ i $\phi \to \psi$ u Λ, onda je i ψ u Λ) i *uniformnu supstituciju* (ako je $\phi \in \Lambda$, onda su i sve njene supstitucijske instance u Λ).

Ako je $\phi \in \Lambda$, kažemo da je ϕ *teorem* od Λ i pišemo $\vdash_\Lambda \phi$ (ili samo $\vdash \phi$ kad je Λ jasna iz konteksta), u protivnom pišemo $\nvdash_\Lambda \phi$ (odnosno samo $\nvdash \phi$).

Definicija 2.2. Modalna logika Λ je *normalna* ako sadrži aksiome

(K) $\quad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(Dual) $\quad \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

i zatvorena je na *generalizaciju* (ako je $\vdash_\Lambda \phi$, onda je i $\vdash_\Lambda \Box\phi$).

Definiciju normalne modalne logike u jeziku propozicionalne dinamičke logike nećemo posebno navoditi. Napomenimo samo da bi za svaki modalni operator $[\pi]$ imali po jedan aksiom K i Dual, kao i odgovarajuće pravilo generalizacije.

Primjer 2.3. (i) Skup svih formula je normalna modalna logika. Zovemo je *inkonzistentna logika.*

(ii) Ako je $\{\Lambda_i \mid i \in I\}$ familija (normalnih) modalnih logika, onda je $\bigcap_{i\in I} \Lambda_i$ (normalna) modalna logika.

(iii) Iz (i) i (ii) slijedi da postoji minimalna modalna logika koja je sadrži neki skup formula Γ. Zove se *logika generirana skupom* Γ. Logika generirana praznim skupom zove se **PC**. Ona sadrži samo tautologije, i to propozicionalne i modalne tautologije (dobivene iz propozicionalnih uniformnom supstitucijom). Sadržana je u svakoj drugoj modalnoj logici.

(iv) Analogno, postoji *normalna modalna logika generirana skupom* Γ. Normalna logika generirana praznim skupom zove se **K** i sadržana je u svakoj drugoj normalnoj modalnoj logici. Napomenimo da su **PC** i **K** različite logike, tj. aksiomi K i Dual zajedno s pravilom generalizacije doista generiraju nove formule.

Skup Γ u primjeru (iv) zove se skup *aksioma*, a normalna modalna logika generirana njime obično se označava s **K**Γ. Još se kaže da je **K**Γ *aksiomatizirana* skupom Γ. Naime, na ovom mjestu bismo mogli definirati jedan hilbertovski sistem izvoda i dokaza, kao što je to napravljeno u [4, str. 33]. Tada bismo mogli pokazati da je normalna modalna logika **K**Γ upravo skup svih formula izvedivih iz Γ. Međutim, hilbertovski sistem ipak ne uvodimo jer nemamo osobite potrebe za njim.

Navedimo neke primjere aksioma i odgovarajućih normalnih modalnih logika koji će nam kasnije poslužiti za ilustraciju nadolazećih koncepata:

(4) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

(T) $p \to \Diamond p$

(B) $p \to \Box\Diamond p$

(D) $\Box p \to \Diamond p$

Odgovarajuće normalne modalne logike generirane ovim aksiomima su redom **K4**, **T**, **B** i **KD**. Kombiniranjem nekoliko aksioma dobivamo još neke istaknute logike. Npr. logika generirana aksiomima T i 4 označava se sa **S4**, a ako dodamo i aksiom B, dobijemo **S5**.

Definicija 2.4. Ako je Γ skup formula, a ϕ formula, kažemo da je ϕ *izvediva u* Λ *iz* Γ (ili da je ϕ Λ-*izvediva iz* Γ) ako je $\vdash_\Lambda \phi$ ili postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Lambda$ takve da je

$$\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \phi.$$

U tom slučaju pišemo $\Gamma \vdash_\Lambda \phi$, a u protivnom $\Gamma \nvdash_\Lambda \phi$.

Skup formula Γ je Λ-*konzistentan* ako je $\Gamma \nvdash_\Lambda \perp$. U protivnom je Λ-*inkonzistentan*. Formula ϕ je Λ-konzistentna ako je skup $\{\phi\}$ Λ-konzistentan; inače je Λ-inkonzistentna.

Jednostavno se provjere sljedeće tri činjenice:

1. Skup Γ je Λ-inkonzistentan ako i samo ako postoji formula ϕ takva da je $\Gamma \vdash_\Lambda \phi \wedge \neg\phi$.

2. Skup Γ je Λ-inkonzistentan ako i samo ako za svaku formulu ψ vrijedi $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$.

3. Skup Γ je Λ-konzistentan ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup Λ-konzistentan.

Definicija 2.5. Logika Λ u jeziku propozicionalne dinamičke logike je *normalna propozicionalna dinamička logika* ako sadrži svaku instancu sljedećih shema aksioma:

(i) $[\pi](p \to q) \to ([\pi]p \to [\pi]q)$

(ii) $\langle\pi\rangle p \leftrightarrow \neg[\pi]\neg p$

(iii) $\langle\pi_1 \circ \pi_2\rangle p \leftrightarrow \langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle p$

(iv) $\langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle p \leftrightarrow (\langle\pi_1\rangle p \vee \langle\pi_2\rangle p)$

(v) $\langle\pi^*\rangle p \leftrightarrow (p \vee \langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle p)$

(vi) $[\pi^*](p \to [\pi]p) \to (p \to [\pi^*]p)$

i zatvorena je na modus ponens, uniformnu supstituciju i generalizaciju ($\vdash_\Lambda \phi$ povlači $\vdash_\Lambda [\pi]\phi$ za svaki program $\pi \in \Pi$). Najmanju normalnu propozicionalnu dinamičku logiku zovemo **PDL**.

Aksiomi (i) i (ii) iz prethodne definicije odgovaraju aksiomima K i Dual iz definicije 2.2. Aksiomi (iii)–(vi) osigurat će da interpretacija operacija $\cup$, $\circ$ i $*$ na programima iz definicije 1.2 bude zadovoljena. Što to točno znači postat će jasno u sljedećem odlomku kad uvedemo pojam regularnog okvira. Napomenimo još da se aksiom (vi) zove *Segerbergov aksiom* ili *aksiom indukcije*.

3 Modeli i okviri

Dosadašnja rasprava bila je isključivo sintaktička. Pričali smo o jezicima, formulama, normalnim modalnim logikama, aksiomima, teoremima, pravilima izvoda, izvedivosti formule iz skupa formula i konzistentnosti. No, što znači da je neka formula istinita? Spomenuli smo kako se uobičajeno čitaju formule s modalnim operatorima. Je li onda formula $\phi \to \Diamond\phi$ („ako je ϕ, onda je moguće ϕ”) istinita? A formula $\Box\phi \to \Diamond\phi$ („ako je nužno ϕ, onda je moguće ϕ”)? Kod Segerbergovog aksioma nas već zaboli glava razmišljajući. Da bismo odgovorili na ta i slična semantička pitanja uvodimo pojmove okvira i modela te definiramo istinitost i valjanost formula.

Definicija 3.1. *Okvir* za osnovni modalni jezik je uređen par $\mathfrak{F} = (W, R)$ pri čemu je W neprazan skup (*nosač*), a R binarna relacija na W (*relacija dostiživosti*). Elemente od W zovemo različitim imenima: svjetovi, točke, stanja.

Model za osnovni modalni jezik je par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ pri čemu je $\mathfrak{F}$ okvir, a $V\colon \Phi \to \mathcal{P}(W)$ funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli $p \in \Phi$ pridružuje podskup $V(p)$ od W. Funkciju V zovemo *valuacija*. Kažemo da je model $\mathfrak{M}$ *baziran na* okviru $\mathfrak{F}$.

Definicija 3.2. Neka je w stanje u modelu $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Induktivno definiramo *istinitost* formule ϕ u stanju w modela $\mathfrak{M}$ (označeno s $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad &\Leftrightarrow \quad w \in V(p), \quad \text{pri čemu } p \in \Phi \\
\mathfrak{M}, w \Vdash \bot \quad & \quad\quad\;\; \text{nikad} \\
\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nije } \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \\
\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ili } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \\
\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi \quad &\Leftrightarrow \quad \text{postoji } v \in W \text{ takav da je } Rwv \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi
\end{aligned}$$

Skup formula Σ je istinit u stanju w modela $\mathfrak{M}$ (označeno s $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$) ako je svaka formula iz Σ istinita u stanju w.

Iz definicije se lako vidi da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$ ako i samo ako za svaki $v \in W$, Rwv povlači $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Nadalje, slučajevi istinitosti formula oblika $\top$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$ i $\phi \leftrightarrow \psi$ su očekivani.

Ako ϕ nije istinita u stanju w modela $\mathfrak{M}$, pišemo $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$. Ako je $\mathfrak{M}$ jasan iz konteksta, često kraće pišemo $w \Vdash \phi$ za $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ i $w \nVdash \phi$ za $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$.

Definicija 3.3. Formula ϕ je *globalno* ili *univerzalno istinita* na modelu $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \Vdash \phi$) ako je istinita u svim stanjima tog modela. Formula ϕ je *ispunjiva na* $\mathfrak{M}$ ako postoji stanje w u $\mathfrak{M}$ u kojem je istinita; *ispunjiva* je ako postoji model na kojem je ispunjiva. Formula je *oboriva na* $\mathfrak{M}$ ako je njena negacija ispunjiva na $\mathfrak{M}$, a oboriva je ako je njena negacija ispunjiva.

Skup formula Σ je globalno istinit (odnosno ispunjiv) na modelu $\mathfrak{M}$ ako je istinit na svim stanjima (odnosno nekom stanju) tog modela.

Definicija 3.4. Formula ϕ je *valjana u stanju* w *okvira* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$) ako je istinita u w na bilo kojem modelu baziranom na $\mathfrak{F}$. ϕ je *valjana na okviru* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \Vdash \phi$) ako je valjana u svakom stanju tog okvira. ϕ je *valjana na klasi okvira* F ($\mathsf{F} \Vdash \phi$) ako je valjana na svakom okviru $\mathfrak{F} \in \mathsf{F}$. Konačno, ϕ je *valjana* ($\Vdash \phi$) ako je valjana na klasi svih okvira. Skup svih valjanih formula na klasi okvira F označavamo s Λ_{F} i zovemo *logika klase okvira* F.

Lako se vidi da je Λ_{F} doista jedna normalna modalna logika. Za primjer, pokažimo da se aksiom K nalazi u Λ_{F}.

Pretpostavimo da je $\mathfrak{M}$ model baziran na okviru iz F i w proizvoljno stanje u tom modelu. Neka je $w \Vdash \Box(p \to q)$ i pretpostavimo $w \Vdash \Box p$. Neka je v

proizvoljno stanje takvo da je Rwv. Tada vrijedi $v \Vdash p \to q$ i $v \Vdash p$. Stoga mora biti $v \Vdash q$, iz čega slijedi $w \Vdash \Box q$. Drugim riječima, dokazali smo da je aksiom K istinit na w. Kako su w i $\mathfrak{M}$ bili proizvoljni, zaključujemo da je K valjan na F pa je sadržan u Λ_{F}.

Zatvorenost skupa Λ_{F} na pravila izvoda slijedi iz ove leme:

Lema 3.5. *Pravila izvoda (modus ponens, generalizacija i uniformna supstitucija) čuvaju valjanost. Preciznije, ako je F klasa okvira, onda za sve formule ϕ, ψ i supstitucije σ vrijedi:*

1. $\mathsf{F} \Vdash \phi$ *i* $\mathsf{F} \Vdash \phi \to \psi$ *povlači* $\mathsf{F} \Vdash \psi$
2. $\mathsf{F} \Vdash \phi$ *povlači* $\mathsf{F} \Vdash \Box\phi$
3. $\mathsf{F} \Vdash \phi$ *povlači* $\mathsf{F} \Vdash \phi^\sigma$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model baziran na okviru $\mathfrak{F}$ iz F, a w proizvoljno stanje iz $\mathfrak{M}$.

1. Zbog $\mathsf{F} \Vdash \phi$ i $\mathsf{F} \Vdash \phi \to \psi$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ i $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \to \psi$. Po definiciji tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$. Stoga je $\mathsf{F} \Vdash \psi$.

2. Neka je v proizvoljno stanje iz $\mathfrak{M}$ takvo da je Rwv. Zbog $\mathsf{F} \Vdash \phi$ specijalno imamo $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. No tad je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$ pa zbog proizvoljnosti $\mathsf{F} \Vdash \Box\phi$.

3. Definiramo valuaciju V' na $\mathfrak{F}$:

   $$V'(p) := \{v \mid \mathfrak{M}, v \Vdash \sigma(p)\}, \qquad p \in \Phi.$$

   Pripadni model označimo s $\mathfrak{M}'$. Indukcijom po složenosti dokazujemo da za sve formule φ i stanja v vrijedi

   $$\mathfrak{M}', v \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi^\sigma.$$

   Za propozicionalne varijable i $\bot$ tvrdnja vrijedi po definiciji. Pretpostavimo da vrijedi za sve formule složenosti manje od n i neka je φ složenosti n. Demonstrirajmo slučaj kad je φ oblika $\Diamond\varphi'$ (ostali slučajevi su slični i jednostavniji):

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}', v \Vdash \Diamond\varphi' &\Leftrightarrow \text{postoji } u,\ Rvu \text{ i } \mathfrak{M}', u \Vdash \varphi' \\ &\Leftrightarrow \text{postoji } u,\ Rvu \text{ i } \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi'^{\sigma} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi'^{\sigma} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \left(\Diamond\varphi'\right)^{\sigma}\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana. No sad $\mathsf{F} \Vdash \phi$ povlači $\mathfrak{M}', w \Vdash \phi$ pa prema dokazanom slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi^{\sigma}$. Zbog proizvoljnosti $\mathfrak{M}$ i w je onda $\mathsf{F} \Vdash \phi^{\sigma}$. □

Napomenimo da za klasu modela M skup $\Lambda_{\mathsf{M}} = \{\phi \mid \mathsf{M} \Vdash \phi\}$ općenito *nije* modalna logika jer ne mora biti zatvoren na uniformnu supstituciju. To proizlazi iz činjenice da uniformna supstitucija ne čuva globalnu istinitost na modelima: ako je propozicionalna varijabla p globalno istinita na modelu, onda isto ne mora vrijediti za varijablu r koja je supstitucijska instanca od p. Međutim, oznaku Λ_{M} ćemo svejedno ponegdje koristiti kao pokratu za skup svih formula globalno istinitih na M.

Definicija 3.6. Neka su $\mathfrak{F} = (W, R)$ i $\mathfrak{F}' = (W', R')$ okviri, a $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ i $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}', V')$ modeli koji su na njima bazirani. Neka je $f\colon W \to W'$ funkcija. Kažemo da je f *izomorfizam okvira* $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{F}'$ ako je bijekcija i zadovoljava uvjet:

(i) za sve $w, v \in W$ je Rwv ako i samo ako je $R'f(w)f(v)$.

Ako uz to f zadovoljava i sljedeći uvjet:

(ii) za sve propozicionalne varijable p i stanja $w \in W$ je $w \in V(p)$ ako i samo ako je $f(w) \in V'(p)$,

kažemo da je f *izomorfizam modela* $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Ukoliko postoji izomorfizam okvira $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{F}'$, odnosno modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, kažemo da su ti okviri, odnosno modeli, *izomorfni*.

Izomorfizam struktura je koncept koji je uobičajen u gotovo svim područjima matematike i logike. Strukture koje su izomorfne možemo poistovijetiti, tj. možemo ih smatrati jednakima. One se, naime, razlikuju samo po prirodi elemenata nosača, no „strukturalne” razlike nema. Uvjet (i) garantira da se relacije dostiživosti ponašaju na isti način, a uvjet (ii) osigurava da je istinitost propozicionalnih varijabli u odgovarajućim stanjima modela jednaka. Preciznije, za sve propozicionalne varijable p i stanja $w \in W$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', f(w) \Vdash p.$$

Indukcijom bismo to mogli proširiti i na proizvoljne formule ϕ:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi.$$

Iz toga proizlazi invarijantnost svojstava poput globalne istinitosti i valjanosti na izomorfne modele, odnosno okvire.

Što se tiče generalizacije definicija iz ovog odlomka za jezik propozicionalne dinamičke logike, posebnih problema nema. Napomenimo da je okvir za taj jezik oblika

$$(W, \{R_\pi \mid \pi \in \Pi\}) \text{ ili kraće zapisano } (W, R_\pi)_{\pi \in \Pi}.$$

Dakle, umjesto samo jedne relacije dostiživosti, okvir za jezik propozicionalne dinamičke logike mora imati po jednu relaciju za svaki program π (tj. za svaki modalni operator $\langle \pi \rangle$). Također, u definiciji istinitosti umjesto slučaja formule oblika $\Diamond \phi$ imamo slučaj formule oblika $\langle \pi \rangle \phi$, za svaki $\pi \in \Pi$:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \langle \pi \rangle \phi \quad \Leftrightarrow \quad \text{postoji } v \in W \text{ takav da je } R_\pi wv \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi.$$

Za dualne modalne operatore $[\pi]$ imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash [\pi]\phi$ ako i samo ako za svaki $v \in W$, $R_\pi wv$ povlači $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$.

Ono što bismo htjeli kod okvira i modela za jezik propozicionalne dinamičke logike je da odražavaju intuitivnu interpretaciju programskih konstruktora $\cup$, $\circ$ i $*$ danu nakon definicije 1.2. Drugim riječima, htjeli bismo sljedeće:

$$\begin{aligned} R_{\pi_1 \cup \pi_2} &= R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2} \\ R_{\pi_1 \circ \pi_2} &= R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2} = \{(x, y) \mid \exists z (R_{\pi_1} xz \wedge R_{\pi_2} zy)\} \\ R_{\pi_1^*} &= (R_{\pi_1})^*, \text{ refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije } R_{\pi_1}. \end{aligned}$$

Stoga definiramo *regularan okvir za* Π: okvir za jezik propozicionalne dinamičke logike takav da je R_a proizvoljna binarna relacija za svaki osnovni program a, a za složene programe π, R_π zadovoljava navedene induktivne uvjete. *Regularan model za* Π je model baziran na regularnom okviru za Π.

Prisjetimo se sad aksioma (iii)–(vi) u definiciji 2.5 normalne propozicionalne dinamičke logike:

$$\begin{aligned}\Delta =\{&\langle\pi_1\circ\pi_2\rangle p\leftrightarrow\langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle p, \langle\pi_1\cup\pi_2\rangle p\leftrightarrow(\langle\pi_1\rangle p\vee\langle\pi_2\rangle p),\\ &\langle\pi^*\rangle p\leftrightarrow(p\vee\langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle p), [\pi^*](p\to[\pi]p)\to(p\to[\pi^*]p)\mid\pi\in\Pi\}\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da su ti aksiomi dovoljno jaki da *definiraju* klasu regularnih okvira. Drugim riječima, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 3.7. *Neka je* R *klasa regularnih okvira, a* $\mathfrak{F}$ *proizvoljan okvir. Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{F}\in\mathsf{R}\ \textit{ako i samo ako}\ \mathfrak{F}\Vdash\Delta\,.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathfrak{F}\in\mathsf{R}$, tj. da je $\mathfrak{F}$ regularan okvir. Moramo pokazati da je svaka formula iz Δ valjana na $\mathfrak{F}$. To ćemo učiniti za aksiom (vi), tj. Segerbergov aksiom $[\pi^*](p\to[\pi]p)\to(p\to[\pi^*]p)$; za ostale se trivijalno vidi da su valjani.

Neka je $\mathfrak{N}$ proizvoljan model baziran na $\mathfrak{F}$, a w proizvoljno stanje. Pretpostavimo $w\Vdash[\pi^*](p\to[\pi]p)$ i $w\Vdash p$.

Indukcijom po $n\in\omega$ dokazujemo da $(R_\pi)^n wv$ povlači $v\Vdash p$. Baza $(n=0)$ očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n i neka je $(R_\pi)^{n+1}wv$. Tada postoji u takav da je $(R_\pi)^n wu$ i $R_\pi uv$.

Zbog $(R_\pi)^* wu$ i regularnosti modela imamo $R_{\pi^*}wu$. Stoga iz $w\Vdash[\pi^*](p\to[\pi]p)$ slijedi $u\Vdash p\to[\pi]p$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $u\Vdash p$ pa imamo $u\Vdash[\pi]p$. No onda $v\Vdash p$. Time je indukcija završena.

Ako je sad $R_{\pi^*}wv$, zbog regularnosti okvira imamo $(R_\pi)^*wv$ pa iz upravo dokazane tvrdnje slijedi $v\Vdash p$. No to znači $w\Vdash[\pi^*]p$. Dakle, Segerbergov aksiom je istinit na w pa je valjan na $\mathfrak{F}$.

Dokaz obratne implikacije je nešto složeniji. Pretpostavimo da je $\mathfrak{F}\Vdash\Delta$ i dokažimo da vrijedi svaki od induktivnih uvjeta iz definicije regularnog okvira:

1. Pretpostavimo da je $R_{\pi_1\circ\pi_2}wv$. Odaberimo valuaciju na $\mathfrak{F}$ takvu da je $V(p)=\{v\}$; neka je $\mathfrak{M}$ pripadni model. Tada je $\mathfrak{M},w\Vdash\langle\pi_1\circ\pi_2\rangle p$. Kako je aksiom (iii) valjan na $\mathfrak{F}$, on je istinit u stanju w modela $\mathfrak{M}$ pa vrijedi

$$\mathfrak{M},w\Vdash\langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle p.$$

Slijedi da postoji stanje u takvo da je $R_{\pi_1}wu$ i $\mathfrak{M}, u \Vdash \langle\pi_2\rangle p$. Iz ovog drugog pak slijedi da postoji stanje v' takvo da je $R_{\pi_2}uv'$ i $\mathfrak{M}, v' \Vdash p$. No v je jedino stanje na kojem je p istinito pa mora biti $v' = v$, tj. $R_{\pi_2}uv$. Time smo pokazali da je $(R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2})wv$.

Istim zaključivanjem unatrag dobije se da je $R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2} \subseteq R_{\pi_1 \circ \pi_2}$.

2. Analogno se iz valjanosti aksioma (iv) pokaže da je $R_{\pi_1 \cup \pi_2} = R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$.

3. Prvo indukcijom po $n \in \omega$ pokazujemo da je $(R_\pi)^n \subseteq R_{\pi^*}$.

Za $n = 0$ moramo pokazati da je R_{π^*} refleksivna relacija. Zato za proizvoljno stanje w odaberimo valuaciju V na $\mathfrak{F}$ takvu da je $V(p) = \{w\}$; neka je $\mathfrak{M}$ pripadni model. Tad svakako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash p \vee \langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle p$ pa onda zbog valjanosti aksioma (v) na $\mathfrak{F}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle\pi^*\rangle p$. Stoga postoji w' takav da je $R_{\pi^*}ww'$ i $\mathfrak{M}, w' \Vdash p$. No w je jedino stanje na kojem je istinito p pa mora biti $w' = w$, tj. $R_{\pi^*}ww$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n i neka su w i v stanja u $\mathfrak{F}$ takva da je $(R_\pi)^{n+1}wv$. Tada postoji stanje u takvo da je $R_\pi wu$ i $(R_\pi)^n uv$. Po pretpostavci indukcije ovo drugo povlači $R_{\pi^*}uv$. Odaberemo valuaciju V na $\mathfrak{F}$ takvu da je $V(p) = \{v\}$; neka je $\mathfrak{M}$ pripadni model. Tada je $\mathfrak{M}, u \Vdash \langle\pi^*\rangle p$, $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle p$ pa onda i $\mathfrak{M}, w \Vdash p \vee \langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle p$. Slično kao ranije, iz valjanosti aksioma (v) zaključujemo da je $R_{\pi^*}wv$.

Time je indukcija završena. Iz dokazanog slijedi $(R_\pi)^* \subseteq R_{\pi^*}$.

Za obrnutu inkluziju pretpostavimo da su w i v stanja takva da je $R_{\pi^*}wv$. Odaberimo valuaciju V na $\mathfrak{F}$ tako da je $V(p) = \{u \mid (R_\pi)^* wu\}$ i neka je $\mathfrak{M}$ pripadni model. Pokažimo da je $\mathfrak{M}, w \Vdash [\pi^*](p \to [\pi]p)$.

Pretpostavimo da je v' stanje takvo da je $R_{\pi^*}wv'$. Ukoliko je $\mathfrak{M}, v' \Vdash p$, onda zbog izbora valuacije V mora biti $(R_\pi)^* wv'$. No tad $R_\pi v'u$ za proizvoljan u povlači $(R_\pi)^* wu$ ($(R_\pi)^*$ je tranzitivno zatvorenje od R_π), iz čega slijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash p$. Prema tome, $\mathfrak{M}, v' \Vdash [\pi]p$. Time smo dokazali da vrijedi $\mathfrak{M}, v' \Vdash p \to [\pi]p$, a onda i $\mathfrak{M}, w \Vdash [\pi^*](p \to [\pi]p)$.

Sad iz valjanosti Segerbergova aksioma slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash p \to [\pi^*]p$. Budući da je $(R_\pi)^*$ refleksivna relacija, evidentno je $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ pa slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash [\pi^*]p$.

No onda je $\mathfrak{M}, v \Vdash p$. Iz izbora valuacije V slijedi $(R_\pi)^* wv$ čime smo dokazali da je $R_{\pi^*} \subseteq (R_\pi)^*$.

Dokazali smo da svi induktivni uvjeti iz definicije regularnog okvira vrijede za $\mathfrak{F}$. Slijedi $\mathfrak{F} \in \mathsf{R}$. □

Modalnu definabilnost nećemo dalje istraživati jer bi nas to odvelo daleko od glavne teme ovog rada. Napomenimo samo da je ovo primjer u kojem se vidi kolika može biti izražajnost modalnih jezika. Naime, klasu regularnih okvira *ne možemo* definirati u logici prvog reda. Više o ovome može se pročitati u [4].

Za kraj ovog odlomka ostaje nam još modalni analogon semantičke posljedice:

Definicija 3.8. Neka je S klasa struktura (okvira ili modela), Σ skup formula, a ϕ formula. Kažemo da je ϕ *semantička posljedica od* Σ *nad* S (oznaka: $\Sigma \Vdash_{\mathsf{S}} \phi$) ako za sve modele $\mathfrak{M}$ iz S (ili bazirane na okviru iz S) i sva stanja w u $\mathfrak{M}$, ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, onda $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

4 Filtracije

Definicija 4.1. Skup formula Σ u osnovnom modalnom jeziku zatvoren je na podformule ako za sve formule ϕ i ψ: $\phi \vee \psi \in \Sigma$ povlači $\phi, \psi \in \Sigma$, $\neg\phi \in \Sigma$ povlači $\phi \in \Sigma$ i $\Diamond\phi \in \Sigma$ povlači $\phi \in \Sigma$.

Definicija 4.2. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model za osnovni modalni jezik i Σ skup formula zatvoren na podformule. Definiramo relaciju $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ na skupu stanja W:

$$w \leftrightsquigarrow_\Sigma v \text{ ako i samo ako}$$
$$\text{za sve } \phi \in \Sigma : (\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \phi).$$

Očito je $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ relacija ekvivalencije. Klasu ekvivalencije stanja w iz $\mathfrak{M}$ označavamo s $|w|_\Sigma$, ili kraće samo s $|w|$. Preslikavanje $w \mapsto |w|$ zovemo *prirodno preslikavanje*.

Neka je $W_\Sigma = \{|w|_\Sigma \mid w \in W\}$ kvocijentni skup skupa W s obzirom na $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ i neka je $\mathfrak{M}^f_\Sigma = (W^f, R^f, V^f)$ bilo koji model za koji vrijedi:

(i) $W^f = W_\Sigma$,

(ii) Rwv povlači $R^f|w||v|$,

(iii) Ako $R^f|w||v|$, onda za sve $\Diamond\phi \in \Sigma$, ako $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, onda $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$,

(iv) $V^f(p) = \{|w| \mid \mathfrak{M}, w \Vdash p\}$, za sve propozicionalne varijable $p \in \Sigma$.

Tad $\mathfrak{M}^f_\Sigma$ zovemo *filtracijom modela* $\mathfrak{M}$ *kroz* Σ.

Teorem 4.3 (o filtraciji)**.** *Neka je* $\mathfrak{M}^f = (W_\Sigma, R^f, V^f)$ *filtracija modela* $\mathfrak{M}$ *kroz na podformule zatvoren skup* Σ. *Tada za sve* $\phi \in \Sigma$ *i sva stanja* w *iz* $\mathfrak{M}$ *imamo:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \phi.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule. Za propozicionalne varijable tvrdnja vrijedi zbog uvjeta (iv) u definiciji 4.2, a za logičku konstantu $\perp$ očito vrijedi.

U koraku indukcije bulovski slučajevi su jednostavni pa demonstriramo slučaj formule oblika $\Diamond\phi$. Ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, onda postoji $v \in W$ takav da je Rwv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Iz uvjeta (ii) definicije 4.2 slijedi $R^f|w||v|$, a iz pretpostavke indukcije i činjenice da je $\phi \in \Sigma$ (zatvorenost na podformule) slijedi $\mathfrak{M}^f, |v| \Vdash \phi$. Zaključujemo da je $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \Diamond\phi$.

Obratno, neka vrijedi $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \Diamond\phi$. Tad postoji $v \in W$ takav da je $R^f|w||v|$ i $\mathfrak{M}^f, |v| \Vdash \phi$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, a onda iz uvjeta (iii) definicije 4.2 imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. □

Postavlja se pitanje postoje li uopće filtracije. Odgovor je da. Uvijek na W_Σ možemo definirati sljedeće dvije relacije:

(i) $R^s|w||v|$ ako i samo ako postoje $w' \in |w|$ i $v' \in |v|$ tako da je $Rw'v'$,

(ii) $R^l|w||v|$ ako i samo ako za sve $\Diamond\phi \in \Sigma$ iz $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$.

Lema 4.4. *Neka je* $\mathfrak{M}$ *model, a* Σ *skup formula zatvoren na podformule. Modeli* $\mathfrak{M}^s = (W_\Sigma, R^s, V^f)$ *i* $\mathfrak{M}^l = (W_\Sigma, R^l, V^f)$, *pri čemu je* V^f *definirana s*

$$V^f(p) = \{|w| \in W_\Sigma \mid \mathfrak{M}, w \Vdash p\}, \qquad p \in \Phi,$$

su filtracije $\mathfrak{M}$ *kroz* Σ. *Nadalje,* $\mathfrak{M}^f = (W_\Sigma, R^f, V^f)$ *je filtracija* $\mathfrak{M}$ *kroz* Σ *ako i samo ako je* $R^s \subseteq R^f \subseteq R^l$.

Dokaz. U prvom dijelu moramo provjeriti da $\mathfrak{M}^s$ i $\mathfrak{M}^l$ zadovoljavaju uvjete definicije 4.2. No to je vrlo jednostavno pa ovdje demonstriramo samo da R^s zadovoljava uvjet (iii).

Pretpostavimo da je $R^s|w||v|$ za stanja $w, v \in W$ i neka vrijedi $\Diamond\phi \in \Sigma$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Prvo, postoje $w' \in |w|$ i $v' \in |v|$ takvi da je $Rw'v'$. Drugo, zbog $v' \leftrightsquigarrow_\Sigma v$ je $\mathfrak{M}, v' \Vdash \phi$, a onda i $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond\phi$. Konačno, zbog $w \leftrightsquigarrow_\Sigma w'$ je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$.

U drugom dijelu, ako je $R^s \subseteq R^f \subseteq R^l$, onda očito relacija R^f zadovoljava uvjete (ii) i (iii) pa je $\mathfrak{M}^f$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ kroz Σ.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathfrak{M}^f$ filtracija. Ako vrijedi $R^s|w||v|$, onda postoje $w' \in |w|'$ i $v' \in |v|$ takvi da je $Rw'v'$. Iz uvjeta (ii) slijedi $R^f|w'||v'|$, tj. $R^f|w||v|$ jer je $|w'| = |w|$ i $|v'| = |v|$. Ako pak vrijedi $R^f|w||v|$, onda iz uvjeta (iii) očito slijedi $R^l|w||v|$. $\square$

Jedno od vrlo korisnih svojstava filtracija je sljedeće:

Propozicija 4.5. *Neka je Σ konačan skup formula zatvoren na podformule. Za svaki model $\mathfrak{M}$, ako je $\mathfrak{M}^f$ filtracija $\mathfrak{M}$ kroz Σ, onda $\mathfrak{M}^f$ ima najviše $2^{\mathsf{card}(\Sigma)}$ stanja.*

Dokaz. Skup stanja u $\mathfrak{M}^f$ je skup W_Σ iz definicije 4.2. Definiramo funkciju $g\colon W_\Sigma \to \mathcal{P}(\Sigma)$:
$$g(|w|) := \{\phi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}.$$
Iz definicije relacije $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ slijedi da je g dobro definirana injekcija. Zaključujemo da je $\mathsf{card}(\Sigma) \leqslant \mathsf{card}(\mathcal{P}(\Sigma)) = 2^{\mathsf{card}(\Sigma)}$. $\square$

Iz prethodne propozicije slijedi važno svojstvo modalnih jezika: ako je formula ϕ ispunjiva, onda je ona ispunjiva na konačnom modelu. Naime, model $\mathfrak{M}$ koji ispunjava ϕ jednostavno filtriramo kroz skup svih podformula od ϕ. Dobiveni model također ispunjava ϕ, a konačan je. Više o svojstvu konačnog modela reći ćemo u trećem poglavlju. Tamo ćemo ga iskoristiti da dokažemo odlučivost logike **PDL**.

Još se treba napomenuti da nema problema pri generalizaciji definicija i teorema iz ovog odlomka za jezik propozicionalne dinamičke logike. Umjesto samo za modalni operator $\Diamond$, posvuda treba uzeti u obzir modalne operatore $\langle\pi\rangle$ za sve $\pi \in \Pi$.

POGLAVLJE 2

Slaba potpunost

U prethodnom poglavlju definirali smo općenite normalne modalne logike te jednu konkretnu koju smo nazvali **PDL**. Definicije su bile sintaktičke—lista aksioma i zatvorenost na generalizaciju, uniformnu supstituciju i modus ponens. Normalne modalne logike mogu se zadati i semantički. Naime, za zadanu klasu okvira F možemo gledati skup svih formula Λ_{F} koje su valjane na svim okvirima iz F. Vidjeli smo da je Λ_{F} normalna modalna logika.

Pitanja koja se prirodno nameću tiču se veze između sintakse i semantike: možemo li za sintaktički zadanu normalnu modalnu logiku pronaći semantičku karakterizaciju; i obrnuto, možemo li za semantički zadanu normalnu modalnu logiku pronaći sintaktičku karakterizaciju. Budući da se fokusiramo na **PDL**, zanima nas odgovor na prvo pitanje u tom konkretnom slučaju. Dajemo ga u ovom poglavlju: **PDL** je upravo normalna modalna logika klase svih regularnih okvira.

5 Adekvatnost i potpunost

Za povezivanje sintakse i semantike normalnih modalnih logika od fundamentalnog su značaja dva pojma koja definiramo u ovom odlomku: *adekvatnost* (engl. *soundness*) i *potpunost* (engl. *completeness*).

Definicija 5.1. Neka je S klasa okvira (ili modela). Kažemo da je normalna modalna logika Λ *adekvatna* za (ili u odnosu na) S ako je $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathsf{S}}$. Drugim riječima, Λ je *adekvatna* za S ako za sve formule ϕ, $\vdash_\Lambda \phi$ povlači $\mathsf{S} \Vdash \phi$. Ako je Λ adekvatna za S, kažemo da je S *klasa okvira (ili modela) za* Λ.

Adekvatnost sintaktički zadane normalne modalne logike u odnosu na neku klasu okvira najčešće se jednostavno dokazuje. Naime, posao se svodi na provjeru jesu li aksiomi logike u pitanju valjane formule na danoj klasi okvira. Ako jesu, činjenica da pravila izvoda (modus ponens, generalizacija i uniformna supstitucija) čuvaju valjanost garantira da su svi teoremi valjani na klasi okvira.

Demonstrirajmo to odmah na primjeru **PDL**:

Propozicija 5.2. **PDL** *je adekvatna za klasu regularnih okvira.*

Dokaz. U propoziciji 3.7 dokazali smo da su svi aksiomi logike **PDL** valjani na klasi regularnih okvira. U lemi 3.5 dokazali smo da pravila izvoda čuvaju valjanost. Kako je svaki teorem logike **PDL** dobiven iz aksioma konačnom primjenom pravila izvoda, slijedi da je svaki teorem valjan na klasi regularnih okvira, tj. **PDL** je adekvatna za tu klasu. □

Dakle, adekvatnost nije problematična. No, kod potpunosti stvari nisu tako jednostavne.

Definicija 5.3. Neka je S klasa okvira (ili modela). Logika Λ je *jako potpuna* u odnosu na S ako za svaki skup formula Γ i formulu ϕ, $\Gamma \Vdash_{\mathsf{S}} \phi$ povlači $\Gamma \vdash_\Lambda \phi$.

Logika Λ je *slabo potpuna* u odnosu na S ako za svaku formulu ϕ, $\mathsf{S} \Vdash \phi$ povlači $\vdash_\Lambda \phi$. Λ je jako (slabo) potpuna u odnosu na jednu strukturu $\mathfrak{S}$ ako je Λ jako (slabo) potpuna u odnosu na $\{\mathfrak{S}\}$.

Primijetimo da je slaba potpunost specijalan slučaj jake potpunosti kad je skup formula Γ prazan. Nadalje, slabu potpunost možemo iskazati analogno adekvatnosti: Λ je slabo potpuna u odnosu na S ako je $\Lambda_{\mathsf{S}} \subseteq \Lambda$. Stoga, ako pokažemo da je neka logika Λ adekvatna i slabo potpuna u odnosu na klasu struktura S, pokazali smo da je $\Lambda = \Lambda_{\mathsf{S}}$, tj. da su sintaksa i semantika savršeno usklađene.

Dokazi potpunosti u svojoj biti su dokazi egzistencije modela. Naime, promotrimo sljedeću često korištenu propoziciju:

Propozicija 5.4. *Logika Λ je jako potpuna u odnosu na klasu struktura S ako i samo ako je svaki Λ-konzistentan skup formula ispunjiv na nekoj $\mathfrak{S} \in \mathsf{S}$. Λ je slabo potpuna u odnosu na klasu struktura S ako i samo ako je svaka Λ-konzistentna formula ispunjiva na nekoj $\mathfrak{S} \in \mathsf{S}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Λ jako potpuna u odnosu na S i neka je Γ Λ-konzistentan skup formula. Ako Γ ne bi bio ispunjiv na S, vrijedilo bi $\Gamma \Vdash_{\mathsf{S}} \bot$ pa zbog jake potpunosti $\Gamma \vdash_\Lambda \bot$. No tad je Γ, suprotno pretpostavci, Λ-inkonzistentan.

Obrnuto, pretpostavimo da Λ nije jako potpuna u odnosu na S. Tada postoje skup formula Γ i formula ϕ takvi da je $\Gamma \Vdash_{\mathsf{S}} \phi$, ali istovremeno $\Gamma \nvdash_\Lambda \phi$. Zbog ovog drugog je $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ Λ-konzistentan, a zbog prvog nije ispunjiv na S.

Nadalje, pretpostavimo da je Λ slabo potpuna u odnosu na S, a ϕ neka je Λ-konzistentna formula. Budući da je $\neg\phi \to (\phi \to \bot)$ supstitucijska instanca tautologije logike sudova, nalazi se u svakoj modalnoj logici, pa tako i u Λ. Slijedi $\nvdash_\Lambda \neg\phi$, a onda zbog slabe potpunosti $\mathsf{S} \nVdash \neg\phi$, što znači da je ϕ ispunjiva na S.

Ako Λ nije slabo potpuna u odnosu na S, onda postoji formula ϕ takva da je $\mathsf{S} \Vdash \phi$, ali $\nvdash_\Lambda \phi$. No tad je $\neg\phi$ Λ-konzistentna i nije ispunjiva na S. $\square$

Prema tome, da bismo pokazali jaku, odnosno slabu potpunost logike Λ u odnosu na klasu struktura S, dovoljno je za proizvoljan Λ-konzistentan skup formula Γ, odnosno formulu ϕ konstruirati model $\mathfrak{M}$ iz S (ili baziran na $\mathfrak{S} \in \mathsf{S}$ ako se radi o klasi okvira) i stanje w iz $\mathfrak{M}$ takve da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$, odnosno $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Upravo to ćemo napraviti kako bismo dokazali slabu potpunost **PDL** u odnosu na klasu regularnih okvira. (Pokazat ćemo i da jaka potpunost ne vrijedi).

6 Kanonski model i kompaktnost

No, za zadanu normalnu logiku Λ i klasu struktura S, kako konstruirati odgovarajući model na kojem će Λ-konzistentan skup Γ ili jedna Λ-konzistentna formula biti ispunjivi? Općenit odgovor nije nam dostupan. Međutim, postoji jedan način konstrukcije koji zauzima centralno mjesto u razmatranjima ovog tipa. Radi se o *kanonskom modelu* za Λ.

Kanonski model ima to svojstvo da je svaki Λ-konzistentan skup formula Γ na njemu ispunjiv. To, naravno, još uvijek neće biti dovoljno da dokažemo da je Λ potpuna u odnosu na S jer kanonski model ne mora biti u toj klasi (ili baziran na strukturi iz te klase). Međutim, on svejedno sadrži mnogo informacija o Λ.

U slučaju **PDL**, kanonski model neće biti regularan, ali taj nedostatak riješit ćemo filtracijom kroz pogodan skup formula. Kombinirajući svojstvo kanonskog modela i Teorem o filtraciji, dobit ćemo željeni rezultat slabe potpunosti.

Pa krenimo u razmatranje kanonskog modela. Prvi sastojak koji nam je potreban su *maksimalni konzistentni skupovi.* Oni će, naime, biti stanja u našem modelu:

Definicija 6.1. Skup formula Γ je *maksimalan* Λ*-konzistentan skup* (kratko: Λ-MCS) ako je Λ-konzistentan, a svaki njegov pravi nadskup je Λ-inkonzistentan.

U sljedećoj propoziciji sumiramo neka tehnička svojstava Λ-MCS-ova:

Propozicija 6.2. *Ako je Λ logika, a Γ maksimalan Λ-konzistentan skup, onda vrijedi:*

(i) Γ *je zatvoren na modus ponens: ako je* $\phi, \phi \to \psi \in \Gamma$, *onda je* $\psi \in \Gamma$

(ii) $\Lambda \subseteq \Gamma$

(iii) *za sve formule* ϕ*:* $\phi \in \Gamma$ *ili* $\neg\phi \in \Gamma$

(iv) *za sve formule* ϕ, ψ*:* $\phi \vee \psi \in \Gamma$ *ako i samo ako je* $\phi \in \Gamma$ *ili* $\psi \in \Gamma$

Slijedi lema koja je tipična u dokazima potpunosti, a govori da se svaki konzistentan skup formula može „napuhati" do maksimalnog konzistentnog skupa.

Lema 6.3 (Lindenbaumova lema)**.** *Ako je Σ Λ-konzistentan skup formula, onda postoji Λ-MCS Σ^+ takav da je $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{S} = \{\Gamma \mid \Gamma \text{ je } \Lambda\text{-konzistentan i } \Sigma \subseteq \Gamma\}$. Očito je $\mathcal{S}$ neprazan jer je $\Sigma \in \mathcal{S}$. Uz skupovnu inkluziju $\mathcal{S}$ je parcijalno uređen skup.

Neka je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$ neprazan lanac. Pokažimo da je $\Psi = \bigcup \mathcal{L}$ Λ-konzistentan skup. U protivnom bi postojale formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Psi$ takve da je

$$\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \bot.$$

No, tad bi postojali skupovi formula $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n \in \mathcal{L}$ takvi da je $\psi_1 \in \Gamma_1, \ldots \psi_n \in \Gamma_n$. Budući da je $\mathcal{L}$ lanac, postojao bi $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, takav da je $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma_i$. Slijedilo bi da je Γ_i, suprotno pretpostavci, Λ-inkonzistentan.

S obzirom da je Ψ Λ-konzistentan i da očito sadrži Σ, slijedi da je $\Psi \in \mathcal{S}$ pa je on gornja međa lanca $\mathcal{L}$ u $\mathcal{S}$. Prema Zornovoj lemi tada $\mathcal{S}$ sadrži maksimalan element Σ^+, što je upravo traženi skup formula. $\square$

Spremni smo definirati kanonski model. Definiciju, kao i rezultate koji slijede u ovom odlomku dajemo za osnovni modalni jezik. Generalizacija za jezik propozicionalne dinamičke logike bit će trivijalna i nećemo je posebno navoditi.

Definicija 6.4 (Kanonski model)**.** Kanonski model $\mathfrak{M}^\Lambda$ za normalnu modalnu logiku Λ je uređena trojka $(W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$, pri čemu:

(i) W^Λ je skup svih Λ-MCS-ova;

(ii) R^Λ je binarna relacija na W^Λ definirana s $R^\Lambda wv$ ako i samo ako za sve formule ψ, $\psi \in v$ povlači $\Diamond\psi \in w$. R^Λ se zove *kanonska relacija.*

(iii) V^Λ je valuacija definirana s $V^\Lambda(p) = \{w \in W^\Lambda \mid p \in w\}$. V^Λ se zove *kanonska* (ili *prirodna*) *valuacija.*

Okvir $\mathfrak{F}^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda)$ na kojem je baziran kanonski model zovemo *kanonski okvir.*

Napomenimo da nam je konačni cilj dokazati Lemu o istinitosti koja će uvjet (iii) iz prethodne definicije proširiti na proizvoljne formule. Drugim riječima, imat ćemo da je formula ϕ istinita na w ako i samo ako je element od w. To znači da će Λ-konzistentan skup formula Σ biti istinit na Σ^+, Λ-MCS-u iz Lindenbaumove leme.

No, prije Leme o istinitosti potrebne su nam dvije leme:

Lema 6.5. *Za svaku normalnu modalnu logiku Λ, $R^\Lambda wv$ ako i samo ako za sve formule ψ, $\Box\psi \in w$ povlači $\psi \in v$.*

Dokaz. Pretpostavimo $R^\Lambda wv$ i da $\psi \notin v$. Budući da je v MCS, slijedi $\neg\psi \in v$. Po definiciji tada vrijedi $\Diamond\neg\psi \in w$, a onda zbog činjenice da je i w MCS slijedi $\neg\Diamond\neg\psi \notin w$, tj. $\Box\psi \notin w$.

Obrnuto, pretpostavimo da za sve formule ψ, $\Box\psi \in w$ povlači $\psi \in v$ i neka je $\psi \in v$ proizvoljna formula. Kad ne bismo imali $\Diamond\psi \in w$, bilo bi $\neg\Diamond\psi \in w$. Tada bi bilo $\Box\neg\psi \in w$ (lako se korištenjem aksioma Dual pokaže da je $\neg\Diamond\psi \leftrightarrow \Box\neg\psi$ teorem svake normalne modalne logike). Zbog pretpostavke bi slijedilo $\neg\psi \in v$, što je kontradikcija s konzistentnošću v. $\Box$

Lema 6.6 (o postojanju)**.** *Za svaku normalnu modalnu logiku Λ i stanje $w \in W^\Lambda$, ako $\Diamond\phi \in w$, onda postoji $v \in W^\Lambda$ takav da je $R^\Lambda wv$ i $\phi \in v$.*

Dokaz. Pretpostavimo $\Diamond\phi \in w$. Neka je v^- skup $\{\phi\} \cup \{\psi \mid \Box\psi \in w\}$. Tada je v^- konzistentan. Jer ako pretpostavimo suprotno, postoje formule $\psi_1, \dots, \psi_n$ takve da je $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \to \neg\phi$. Korištenjem generalizacije i aksioma K dobijemo

$$\vdash_\Lambda \Box(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \to \Box\neg\phi,$$

a onda iz činjenice da je $(\Box\psi_1 \wedge \dots \wedge \Box\psi_n) \to \Box(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n)$ teorem svake normalne modalne logike slijedi

$$\vdash_\Lambda (\Box\psi_1 \wedge \dots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\neg\phi.$$

S obzirom da je $\Box\psi_1, \dots, \Box\psi_n \in w$, a w je MCS, slijedi $\Box\psi_1 \wedge \dots \wedge \Box\psi_n \in w$. Stoga je $\Box\neg\phi \in w$. Korištenjem aksioma Dual je $\neg\Diamond\phi \in w$. No to je nemoguće jer je $\Diamond\phi \in w$. Dakle, v^- je konzistentan.

Sad primjenom Lindenbaumove leme imamo Λ-MCS v koji sadrži v^-. Stoga je prema konstrukciji $\phi \in v$ i za svaku formulu ψ, $\Box\psi \in w$ povlači $\psi \in v$. Po prethodnoj lemi je onda $R^\Lambda wv$. □

Lema 6.7 (o istinitosti). *Za svaku normalnu modalnu logiku Λ i formulu ϕ, $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash \phi$ ako i samo ako je $\phi \in w$.*

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule ϕ. Baza slijedi iz definicije V^Λ. U koraku, bulovski slučajevi slijede iz propozicije 6.2. Ostaje slučaj kad je ϕ oblika $\Diamond\psi$.

Ako je $\Diamond\psi \in w$, onda prema Lemi o postojanju postoji v takav da je $R^\Lambda wv$ i $\psi \in v$. Po pretpostavci indukcije je $\mathfrak{M}^\Lambda, v \Vdash \psi$, no onda je $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash \Diamond\psi$.

Obrnuto, ako je $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash \Diamond\psi$, onda postoji v takav da je $R^\Lambda wv$ i $\mathfrak{M}^\Lambda, v \Vdash \psi$. Prema pretpostavci indukcije je $\psi \in v$, no onda iz definicije R^Λ slijedi $\Diamond\psi \in w$. □

Konačno imamo sve potrebno da dokažemo najvažnije svojstvo kanonskog modela, spomenuto na početku odlomka:

Teorem 6.8 (o kanonskom modelu). *Svaka normalna modalna logika je jako potpuna u odnosu na svoj kanonski model.*

Dokaz. Neka je Σ konzistentan skup normalne modalne logike Λ. Prema Lindenbaumovoj lemi, postoji Λ-MCS Σ^+ koji proširuje Σ. Prema Lemi o istinitosti, $\mathfrak{M}^\Lambda, \Sigma^+ \Vdash \Sigma$. □

Jedna od jednostavnih posljedica Teorema o kanonskom modelu je jaka potpunost minimalne normalne logike **K** u odnosu na klasu svih okvira:

Teorem 6.9. **K** *je jako potpuna u odnosu na klasu svih okvira.*

Dokaz. Neka je Σ proizvoljan **K**-konzistentan skup formula. Tada je po dokazu prethodnog teorema Σ ispunjiv na kanonskom modelu za **K**, modelu baziranom na okviru iz klase svih okvira. □

Pokažimo kako kanonski model možemo iskoristiti da jednostavno dokažemo još neke rezultate jake potpunosti.

Primjer 6.10. Dokazat ćemo da su normalne modalne logike koje proširuju **K4**, **T**, **B**, **KD** jako potpune u odnosu na, redom, klase tranzitivnih, refleksivnih, simetričnih i desno neograničenih okvira.

Naime, neka Λ_4 proširuje logiku **K4**. Tad ona sadrži aksiom 4: $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Da bismo dokazali da je Λ_4 jako potpuna u odnosu na klasu tranzitivnih okvira, moramo dokazati da je svaki Λ_4-konzistentan skup formula ispunjiv na tranzitivnom okviru. No mi znamo da je svaki takav skup ispunjiv na kanonskom okviru. Ako uspijemo dokazati da je sam kanonski okvir tranzitivan, imat ćemo traženi rezultat.

Pa pretpostavimo da je $R^{\Lambda_4}wv$ i $R^{\Lambda_4}vu$. Želimo dokazati da je $R^{\Lambda_4}wu$. Neka je $\phi \in u$ proizvoljna formula. Tada vrijedi $\Diamond\phi \in v$ pa onda $\Diamond\Diamond\phi \in w$. No kako je w Λ_4-MCS, on sadrži $\Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$ pa zbog zatvorenosti na modus ponens sadrži i $\Diamond\phi$. Zaključujemo da je $R^{\Lambda_4}wu$, tj. kanonski okvir za Λ_4 je tranzitivan.

Na sličan način dokazujemo da je kanonski okvir za logiku Λ_T koja proširuje **T** refleksivan. Naime, neka je w stanje u tom okviru i neka je $\phi \in w$. Budući da Λ_T sadrži aksiom T: $p \to \Diamond p$, a w je Λ_T-MCS, w sadrži formulu $\phi \to \Diamond\phi$. Tada w sadrži $\Diamond\phi$ pa slijedi $R^{\Lambda_T}ww$.

Dalje, neka Λ_B proširuje logiku **B** i neka su w i v stanja u kanonskom okviru takva da je $R^{\Lambda_B}wv$. Neka je $\phi \in w$. Iz činjenice da Λ_B sadrži aksiom B: $p \to \Box\Diamond p$ na već rutinski način zaključujemo da w sadrži formulu $\phi \to \Box\Diamond\phi$, tj. sadrži formulu $\Box\Diamond\phi$. Tada prema lemi 6.5 slijedi da v sadrži $\Diamond\phi$. Slijedi $R^{\Lambda_B}vw$ pa je kanonski okvir za Λ_B simetričan.

I konačno, neka Λ_D proširuje logiku **KD**. Da bismo dokazali desnu neograničenost kanonskog okvira za Λ_D, moramo pokazati da za svaki Λ_D-MCS w postoji

v takav da je $R^{\Lambda_D}wv$. Pa neka je w proizvoljan. Kako Λ_D sadrži aksiom D: $\Box p \to \Diamond p$, w sadrži formulu $\Box\top \to \Diamond\top$. No, svaka normalna logika sadrži $\top$, a zbog zatvorenosti na generalizaciju i $\Box\top$. Slijedi da w sadrži $\Box\top$ pa onda i $\Diamond\top$. Lema o postojanju tada osigurava postojanje Λ_D-MCS-a v takvog da je $R^{\Lambda_D}wv$.

Dakle, nekad je struktura kanonskog okvira takva da rezultat jake potpunosti odmah slijedi. Ali iz prethodnog primjera možemo još nešto zaključiti. Vratimo se opet logici Λ_4 za koju smo pokazali da ima tranzitivan kanonski okvir. Posebnost aksioma 4 je ta da je taj aksiom *valjan* na svakom tranzitivnom okviru, pa tako i na kanonskom okviru za Λ_4. (Čak štoviše, okvir je tranzitivan ako i samo ako je aksiom 4 valjan na njemu.)

Isto vrijedi i za aksiome T, B i D. Svaki od njih je valjan na kanonskom okviru odgovarajuće logike. Mogli bismo pomisliti da to vrijedi za sve formule, međutim kasnije ćemo vidjeti primjer koji će opovrgnuti tu misao. No, svakako je zanimljivo posebno proučiti formule s tim svojstvom:

Definicija 6.11. Formula ϕ je *kanonska* ako za svaku normalnu modalnu logiku Λ, $\phi \in \Lambda$ povlači da je ϕ valjana na kanonskom okviru za Λ. Normalna logika Λ je *kanonska* ako je adekvatna za svoj kanonski okvir. (Drugim riječima, Λ je kanonska ako su sve formule ϕ takve da je $\vdash_\Lambda \phi$ valjane na kanonskom okviru za Λ.)

Dakle, aksiomi 4, T, B i D su kanonske formule. Nadalje, **K4**, **T**, **B** i **KD** su kanonske logike. Naime, svi njihovi aksiomi su valjani na odgovarajućem kanonskom okviru, a kako pravila izvoda čuvaju valjanost, svi teoremi tih logika su valjani na odgovarajućem kanonskom okviru.

Ono što se odmah vidi kad je riječ o kanonskim logikama Λ je da su one adekvatne i jako potpune u odnosu na barem jednu klasu okvira: $\{\mathfrak{F}^\Lambda\}$. Kod **PDL**-a, kao što ćemo pokazati, neće biti tako. Naime, vidjet ćemo da **PDL** nema sljedeće svojstvo:

Definicija 6.12. Normalna modalna logika Λ je *kompaktna* ako je svaki Λ-konzistentan skup Σ ispunjiv na okviru za Λ.

Jasno je da je svaka logika koja je adekvatna i jako potpuna u odnosu na neku klasu okvira kompaktna. Na sljedećem dijagramu sumiramo odnose između netom uvedenih pojmova:

$$\begin{gathered}\text{kanonska logika}\\ \Downarrow\\ \text{logika adekvatna i jako potpuna u odnosu}\\ \text{na neku klasu okvira}\\ \Downarrow\\ \text{kompaktna logika}\end{gathered}$$

7 Nekompaktnost i slaba potpunost **PDL**

Označimo s Λ logiku klase regularnih okvira. (Kasnije ćemo vidjeti da je to upravo **PDL**, međutim zasad iz propozicije 5.2 znamo samo da je **PDL** $\subseteq \Lambda$.) Pokažimo da je Λ nekompaktna logika. Naime, promotrimo skup

$$\Sigma = \{\langle a^*\rangle p, \neg p, \neg\langle a\rangle p, \neg\langle a\rangle\langle a\rangle p, \neg\langle a\rangle\langle a\rangle\langle a\rangle p, \ldots\},$$

pri čemu je $a \in \Pi$ osnovni program. Dokazat ćemo da je Σ Λ-konzistentan, ali da nije ispunjiv ni na jednom okviru za Λ.

Da bismo dokazali da je Σ Λ-konzistentan, dovoljno je dokazati da je svaki konačan podskup od Σ Λ-konzistentan, a za to je pak dovoljno dokazati da je svaki konačan podskup od Σ ispunjiv na regularnom okviru. Naime, pretpostavimo da je Φ konačan podskup od Σ i označimo s $\widehat{\Phi}$ konjunkciju svih formula iz Φ. Kad bi Φ bio Λ-inkonzistentan, vrijedilo bi $\vdash_\Lambda \widehat{\Phi} \to \bot$. Budući da je formula $(\widehat{\Phi} \to \bot) \to \neg\widehat{\Phi}$ supstitucijska instanca tautologije logike sudova, sadržana je u svakoj normalnoj modalnoj logici pa bi slijedilo $\vdash_\Lambda \neg\widehat{\Phi}$. No to znači da Φ ne bi bio ispunjiv na regularnom okviru.

Neka je, dakle, Φ konačan podskup od Σ. Pogledajmo skupove

$$\Phi_n := \{\langle a^*\rangle p\} \cup \{\neg\langle a\rangle^k p \mid 0 \leqslant k < n\}, \quad \text{za } n \in \omega.$$

Očito postoji n takav da je $\Phi \subseteq \Phi_n \subseteq \Sigma$. Konstruiramo regularan model $\mathfrak{R} = (W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ na kojem će Φ_n biti ispunjen: stavimo $W = \{0, 1, \ldots, n\}$. Relaciju R_a definiramo s $R_a ij$ ako i samo ako je $j = i + 1$. Ostale relacije za osnovne programe ostavimo prazne, a za složene proširimo po regularnosti. To nam osigurava regularnost modela $\mathfrak{R}$. Na kraju, izaberemo valuaciju V takvu da je $V(p) = \{n\}$. Iz konstrukcije je jasno da je $\mathfrak{R}, 0 \Vdash \Phi_n$, a onda je i $\mathfrak{R}, 0 \Vdash \Phi$.

Dakle, skup Σ je Λ-konzistentan skup formula. Međutim, čitav Σ ne može biti ispunjiv ni na jednom okviru za Λ. Naime, iz propozicije 3.7 slijedi da je svaki okvir za Λ regularan. Kad bismo imali regularan model $\mathfrak{M}$ i stanje w takve da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, imali bismo $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle a^* \rangle p$. No tad bi postojalo stanje v takvo da je $(R_a)^n wv$ za neki $n \in \omega$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash p$. Slijedilo bi $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle a \rangle^n p$. Međutim, imamo i $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg \langle a \rangle^n p$, što je kontradikcija.

Prema tome, logika Λ je nekompaktna, što odmah povlači da je rezultat jake potpunosti u odnosu na klasu regularnih okvira izvan domašaja. Koncentrirajmo se zato na slabu potpunost. U nastavku želimo dobiti rezultat $\Lambda \subseteq$ **PDL**. Umjesto **PDL**-konzistentnosti, govorit ćemo o konzistentnosti, umjesto $\vdash_{\mathsf{PDL}} \phi$ pisat ćemo $\vdash \phi$ itd.

Prema propoziciji 5.4, moramo pokazati da je svaka konzistentna formula ϕ ispunjiva na regularnom modelu. U prethodnom odlomku dokazali smo „skoro" to: svaka konzistentna formula ϕ ispunjiva je na kanonskom modelu za **PDL**. No, kanonski model nije regularan. Kad bi bio regularan, onda bi bilo **PDL** $= \Lambda$ i Λ bi bila kompaktna, čak kanonska, što smo vidjeli da nije.

Međutim, trud uložen u prethodni odlomak nije uzaludan. Naime, pronaći ćemo skup formula i filtraciju kanonskog modela kroz taj skup koja će biti regularna. Korištenjem Teorema o filtraciji dobit ćemo traženi rezultat.

Definicija 7.1. Neka je X skup formula. X je *Fischer-Ladner zatvoren* ako je zatvoren na podformule i zadovoljava sljedeće uvjete za sve $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \Pi$:

(i) Ako je $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \phi \in X$, onda je $\langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \phi \in X$.

(ii) Ako je $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \phi \in X$, onda je $\langle \pi_1 \rangle \phi \vee \langle \pi_2 \rangle \phi \in X$.

(iii) Ako je $\langle \pi^* \rangle \phi \in X$, onda je $\langle \pi \rangle \langle \pi^* \rangle \phi \in X$.

Ako je Σ bilo koji skup formula, onda s $\mathsf{FL}(\Sigma)$ označavamo *Fischer-Ladnerovo zatvorenje* od Σ—najmanji skup formula koji je Fischer-Ladner zatvoren i sadrži Σ.

Za formulu ϕ definiramo $\sim\phi$:

$$\sim\phi := \begin{cases} \psi, & \text{ako je } \phi \text{ oblika } \neg\psi, \\ \neg\phi, & \text{inače.} \end{cases}$$

Skup formula X je *zatvoren na jednostruke negacije* ako je $\sim\phi \in X$ kad god je $\phi \in X$.

Definiramo $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, *zatvorenje* skupa Σ, kao najmanji skup koji sadrži Σ, Fischer-Ladner zatvoren je i zatvoren je na jednostruke negacije.

Zatvorenje skupa $\{\phi\}$ bit će upravo spomenuti skup kroz koji ćemo filtrirati kanonski model da bismo dobili regularan model na kojem je ϕ ispunjiva. Od presudne je važnosti da zatvorenje ostane konačan skup. Zato uvodimo logički veznik $\sim$ koji je jednako dobar kao $\neg$, ali neće učiniti zatvorenje beskonačnim. Formulu $\sim\phi$ je najbolje doživljavati kao pravu negaciju formule ϕ.

Propozicija 7.2. *Ako je Σ konačan skup formula, onda je i njegovo zatvorenje $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ konačano. Štoviše, ako je n duljina najdulje formule iz Σ, onda $\mathsf{card}(\neg\mathsf{FL}(\Sigma))$ možemo asimptotski ocijeniti s $\mathcal{O}(n\mathsf{card}(\Sigma))$.*

Dokaz. Označimo sa Σ_0 zatvorenje skupa Σ na podformule. Tada je Σ_0 očito konačan skup. Pretpostavimo da smo za neki $n \geqslant 0$ definirali konačan skup Σ_n koji je zatvoren na podformule. Definiramo skup Σ_{n+1}:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{n+1} = \Sigma_n &\cup \{\langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle\phi, \langle\pi_2\rangle\phi \mid \langle\pi_1 \circ \pi_2\rangle\phi \in \Sigma_n\} \\
&\cup \{\langle\pi_1\rangle\phi \vee \langle\pi_2\rangle\phi, \langle\pi_1\rangle\phi, \langle\pi_2\rangle\phi \mid \langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle\phi \in \Sigma_n\} \\
&\cup \{\langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle\phi \mid \langle\pi^*\rangle\phi \in \Sigma_n\}\,.
\end{aligned}$$

Jasno je da je Σ_{n+1} također konačan, a lako se vidi i da je zatvoren na podformule. Primijetimo i da ukoliko formula $\langle\pi\rangle\phi \in \Sigma_n$ uzrokuje dodavanje formule $\langle\rho\rangle\phi'$, složenost programa ρ je strogo manja od složenosti programa π. To znači da postoji m takav da je $\Sigma_m = \Sigma_{m+1}$, tj. u nekom trenutku prestaje dodavanje novih formula. Očito je $\Sigma_m = \mathsf{FL}(\Sigma)$, pa je $\mathsf{FL}(\Sigma)$ konačan skup. Tada je i $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ konačan i ima najviše dvostruko više elemenata od $\mathsf{FL}(\Sigma)$.

Kako bismo dali asimptotsku ocjenu skupa $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, označimo s $G(\phi)$ gornju ogradu na broj elemenata u skupu $\mathsf{FL}(\{\phi\})$ definiranu rekurzijom:

$$\begin{aligned}
G(p) = G(\bot) &= 1, \qquad \text{za } p \in \Phi, \\
G(\phi \vee \psi) &= G(\phi) + G(\psi) + 1, \\
G(\neg\phi) &= G(\phi) + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(\langle a\rangle\phi) &= G(\phi)+1, \qquad \text{za } a\in\Pi_0,\\
G(\langle\pi_1\circ\pi_2\rangle\phi) &= G(\langle\pi_1\rangle\top)+G(\langle\pi_2\rangle\top)+G(\phi)+2,\\
G(\langle\pi_1\cup\pi_2\rangle\phi) &= G(\langle\pi_1\rangle\top)+G(\langle\pi_2\rangle\top)+G(\phi)+2,\\
G(\langle\pi^*\rangle\phi) &= G(\langle\pi\rangle\top)+G(\phi)+1.
\end{aligned}$$

G je dobro definirana jer se $G(\phi)$ uvijek definira pomoću kraćih formula.

Primijetimo trik u zadnja tri uvjeta. Ne bi bilo dobro da smo stavili $G(\langle\pi^*\rangle\phi) = G(\langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle\phi)+1$ jer G ne bi bila dobro definirana. Međutim, jasno je da se $\mathsf{FL}(\{\langle\pi^*\rangle\phi\})$ sastoji od same formule $\langle\pi^*\rangle\phi$, od formula iz $\mathsf{FL}(\{\phi\})$, te od formula oblika $\langle\rho\rangle\langle\pi^*\rangle\phi$ gdje je ρ potprogram programa π. Broj formula ovog oblika isti je ako $\langle\pi^*\rangle\phi$ zamijenimo s $\top$.

U ostala dva slučaja trik se koristi iz nešto drukčijeg razloga. Naime, da smo stavili $G(\langle\pi_1\cup\pi_2\rangle\phi) = G(\langle\pi_1\rangle\phi)+G(\langle\pi_2\rangle\phi)+2$, ne bismo mogli dobiti zadovoljavajuću asimptotsku ocjenu.

Dakle, evidentno je $G(\phi) = \mathcal{O}(|\phi|)$, pri čemu smo s $|\phi|$ označili duljinu formule ϕ. Time slijedi da je $\mathsf{card}(\mathsf{FL}(\{\phi\})) = \mathcal{O}(|\phi|)$, a onda i $\mathsf{card}(\neg\mathsf{FL}(\{\phi\})) = \mathcal{O}(|\phi|)$. Kako je zatvorenje skupa očito jednako uniji zatvorenja jednočlanih podskupova, slijedi tvrdnja propozicije. $\square$

Na putu do glavnog rezultata služit ćemo se svojevrsnom generalizacijom maksimalnih konzistentnih skupova:

Definicija 7.3. Neka je Σ skup formula. Skup formula A je *atom* nad Σ ako je maksimalan konzistentan podskup od $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. Drugim riječima, A je atom nad Σ ako je $A\subseteq\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, A je konzistentan, i ako je $A\subset B\subseteq\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, B je inkonzistentan. $At(\Sigma)$ je skup svih atoma nad Σ.

Ako je Σ skup svih formula, atomi su jednostavno MCS-ovi. U općenitom slučaju vrijedi sljedeća veza između atoma i MCS-ova:

Lema 7.4. *Neka je $\mathcal{M}$ skup svih MCS-ova, a Σ skup formula. Tada je*

$$At(\Sigma) = \{\Gamma\cap\neg\mathsf{FL}(\Sigma) \mid \Gamma\in\mathcal{M}\}.$$

Dokaz. Ukoliko je A atom, A je konzistentan skup. Neka je A^+ MCS koji proširuje A (takav postoji zbog Lindenbaumove leme). Očito je $A\subseteq A^+\cap\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. Pretpostavimo da je $\phi\in A^+\cap\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ takva da $\phi\notin A$. Tada je $A\cup\{\phi\}\subseteq\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$

pravi nadskup od A koji je konzistentan (kao podskup konzistentnog skupa A^+). No to je nemoguće jer je A atom. Slijedi $A^+ \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma) \subseteq A$.

Obrnuto, pretpostavimo da je Γ MCS i pokažimo da je $\Gamma \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ atom. Očito je to konzistentan skup. Pretpostavimo da je $\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ formula koja nije u $\Gamma \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. Tad ona nije u Γ. Kako je Γ MCS, onda je $\sim\phi \in \Gamma$. No $\sim\phi$ je i u $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ pa je u $\Gamma \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. To znači da je $(\Gamma \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)) \cup \{\phi\}$ inkonzistentan skup. Dakle, $\Gamma \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ je atom. $\square$

Uvedimo oznake: ako je w MCS, s A_w ćemo označavati atom $w \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ (Σ će biti jasan iz konteksta). Primijetimo da su u slučaju konačnog skupa Σ zbog propozicije 7.2 i atomi konačni. U tom slučaju s $\widehat{A}$ ćemo označavati konjunkciju svih formula iz A.

Definicija 7.5. Neka je Σ konačan skup formula, a $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ kanonski model za **PDL** (dakle, W je skup MCS-ova). Neka je $\leftrightsquigarrow_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}$ relacija nad W kao u definiciji 4.2, a $W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}$ odgovarajući kvocijentni skup skupa W. Za svaki $\pi \in \Pi$ definiramo relaciju S^f_π nad $W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}$:

$$S^f_\pi|w||v| \text{ ako i samo ako je formula } \widehat{A_w} \wedge \langle\pi\rangle\widehat{A_v} \text{ konzistentna.}$$

Propozicija 7.6. *Neka je Σ konačan skup formula, a $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ kanonski model za* **PDL**. *Tada je $\mathfrak{M}^f = (W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}, S^f_\pi, V^f)_{\pi\in\Pi}$, pri čemu je V^f definirana s*

$$V^f(p) = \{|w| \in W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)} \mid p \in w\}, \qquad p \in \Phi,$$

filtracija modela $\mathfrak{M}$ kroz skup $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$.

Dokaz. Dokazat ćemo da za svaki $\pi \in \Pi$ vrijedi $R^s_\pi \subseteq S^f_\pi \subseteq R^l_\pi$, pri čemu su R^s_π i R^l_π relacije iz filtracija $\mathfrak{M}^s$ i $\mathfrak{M}^l$, kao u lemi 4.4. Iz spomenute leme slijedit će da je $\mathfrak{M}^f$ filtracija.

Pretpostavimo da je $R^s_\pi|w||v|$. Tada postoje stanja w' i v' u kanonskom modelu takva da je $w \leftrightsquigarrow_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)} w'$, $v \leftrightsquigarrow_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)} v'$ i $R_\pi w'v'$. Iz prve dvije činjenice uz pomoć Leme o istinitosti (lm. 6.7) slijedi $A_w = A_{w'}$ i $A_v = A_{v'}$, a iz treće činjenice i definicije kanonskog modela slijedi da za sve formule $\phi \in v'$ vrijedi $\langle\pi\rangle\phi \in w'$.

Kako je $A_v = A_{v'} \subseteq v'$, a v' je MCS, slijedi $\widehat{A_v} \in v'$. Stoga je $\langle\pi\rangle\widehat{A_v} \in w'$. No imamo i $A_w = A_{w'} \subseteq w'$ pa je $\widehat{A_w} \in w'$. Zajedno, to nam daje $\widehat{A_w} \wedge \langle\pi\rangle\widehat{A_v} \in w'$ pa je ta formula konzistentna. Zaključujemo $S^f_\pi|w||v|$.

Pretpostavimo da je $S^f_\pi|w||v|$. Tada je formula $\widehat{A_w} \land \langle\pi\rangle\widehat{A_v}$ konzistentna. Neka je ϕ formula takva da je $\langle\pi\rangle\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ (tj. $\phi \in v$). Ako ne bi bilo $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle\pi\rangle\phi$ imali bismo $\neg\langle\pi\rangle\phi \in w$. Tada bismo mogli izvesti sljedeće zaključke:

- $\phi \in A_v$ jer, sjetimo se, $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ je zatvoren na podformule. Slijedi da je formula $\widehat{A_w} \land \langle\pi\rangle\widehat{A_v} \to \langle\pi\rangle\phi$ tautologija.
- $\neg\langle\pi\rangle\phi \in A_w$ jer je $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ zatvoren na jednostruke negacije. Slijedi da je formula $\widehat{A_w} \land \langle\pi\rangle\widehat{A_v} \to \neg\langle\pi\rangle\phi$ tautologija.

Naravno, ovo dvoje je u kontradikciji s činjenicom da je $\widehat{A_w} \land \langle\pi\rangle\widehat{A_v}$ konzistentna. Slijedi $R^l_\pi|w||v|$. □

Našli smo, dakle, potencijalno dobru filtraciju kanonskog modela. Međutim, ako bismo krenuli dokazivati da je ona regularna, upali bismo u probleme. Zato ćemo definirati novi model sličan modelu $\mathfrak{M}^f$:

Definicija 7.7. Neka je Σ konačan skup formula. Definiramo *regularan model nad* Σ kao $\mathfrak{R} = (W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}, R^f_\pi, V^f)_{\pi\in\Pi}$, pri čemu je $R^f_a = S^f_a$ za osnovne programe a, dok je za složene programe R^f_π definirana induktivno na već uobičajen način pomoću unije, kompozicije i refleksivnog tranzitivnog zatvorenja. V^f je standardna valuacija.

Model $\mathfrak{R}$ smo natjerali da bude regularan. Međutim, sad je glavno pitanje je li i $\mathfrak{R}$ filtracija kanonskog modela kroz $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. Odgovor je da, ali potrebno se još malo pomučiti da to dokažemo. Naime, vidimo da je za osnovne programe $S^f_a = R^f_a$. Bilo bi lijepo kad bismo jednakost uspjeli pokazati i za složene programe, ali aksiomi **PDL**-a nisu dovoljno jaki da to osiguraju. No dovoljno su jaki da osiguraju $S^f_\pi \subseteq R^f_\pi$, što će nam uz $R^f_\pi \subseteq R^l_\pi$ biti sasvim dovoljno.

Lema 7.8. *Za sve programe $\pi \in \Pi$ vrijedi $S^f_{\pi^*} \subseteq (S^f_\pi)^*$.*

Dokaz. Neka je $\pi \in \Pi$ program i neka su w i v MCS-ovi takvi da je $S^f_{\pi^*}|w||v|$. Označimo s $\mathcal{D}$ sljedeći skup atoma:

$$\mathcal{D} = \{A_u \mid u \text{ je MCS i } (S^f_\pi)^*|w||u|\}.$$

Pokazat ćemo da je $A_v \in \mathcal{D}$.

Neka je δ formula $\bigvee_{D\in\mathcal{D}} \widehat{D}$. Pretpostavimo da je formula $\delta\wedge\langle\pi\rangle\neg\delta$ konzistentna. Označimo formule iz $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ sa $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ (konačno ih je zbog propozicije 7.2). Stavimo $E_0=\varnothing$; tada je to konzistentan skup. Dogovorno neka je $\widehat{E_0}\equiv\top$.

Pretpostavimo da smo za neki $n<m$ definirali konzistentan skup E_n takav da je formula $\delta\wedge\langle\pi\rangle(\neg\delta\wedge\widehat{E_n})$ konzistentna. Tada imamo

$$\vdash \Big(\delta\wedge\langle\pi\rangle(\neg\delta\wedge\widehat{E_n})\Big)\leftrightarrow\Big(\delta\wedge\langle\pi\rangle\big((\neg\delta\wedge\widehat{E_n}\wedge\sigma_{n+1})\vee(\neg\delta\wedge\widehat{E_n}\wedge{\sim}\sigma_{n+1})\big)\Big).$$

Tada je jedna od formula $\delta\wedge\langle\pi\rangle(\neg\delta\wedge\widehat{E_n}\wedge\sigma_{n+1})$ i $\delta\wedge\langle\pi\rangle(\neg\delta\wedge\widehat{E_n}\wedge{\sim}\sigma_{n+1})$ konzistentna. U slučaju da se radi o prvoj, stavimo $E_{n+1}=E_n\cup\{\sigma_{n+1}\}$, a u slučaju da se radi o drugoj, stavimo $E_{n+1}=E_n\cup\{{\sim}\sigma_{n+1}\}$. Evidentno je E_{n+1} također konzistentan skup.

Na ovaj način konstruirali smo atom $E=E_m$ za koji je formula $\delta\wedge\langle\pi\rangle(\neg\delta\wedge\widehat{E})$ konzistentna. No tad je konzistentna i formula $\delta\wedge\langle\pi\rangle\widehat{E}$ pa postoji $D\in\mathcal{D}$ takav da je $\widehat{D}\wedge\langle\pi\rangle\widehat{E}$ konzistentna. Neka su u i u' MCS-ovi takvi da je $A_u=D$, $A_{u'}=E$; imamo $S^f_\pi|u||u'|$ što povlači $(S^f_\pi)^*|w||u'|$. Dakle, E je u $\mathcal{D}$.

Međutim, tada je $\widehat{E}$ jedan od disjunkata u formuli δ. Konzistentnost formule $\delta\wedge\langle\pi\rangle(\neg\delta\wedge\widehat{E})$ povlači konzistentnost formule $\neg\delta\wedge\widehat{E}$, a to onda povlači konzistentnost formule $\neg\widehat{E}\wedge\widehat{E}$, što je kontradikcija.

Prema tome, formula $\delta\wedge\langle\pi\rangle\neg\delta$ je inkonzistentna. Stoga vrijedi $\vdash\neg(\delta\wedge\langle\pi\rangle\neg\delta)$, tj. $\vdash\delta\to[\pi]\delta$. Generalizacijom za $[\pi^*]$ dobijemo $\vdash[\pi^*](\delta\to[\pi]\delta)$, a onda korištenjem Segerbergova aksioma dobijemo $\vdash\delta\to[\pi^*]\delta$. Kako je $A_w\in\mathcal{D}$, $\widehat{A_w}$ je jedan od disjunkata u δ pa imamo $\vdash\widehat{A_w}\to\delta$. Zaključujemo $\vdash\widehat{A_w}\to[\pi^*]\delta$.

Nadalje, vrijedi

$$\vdash\Big(\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle\widehat{A_v}\Big)\leftrightarrow\Big(\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle\big((\widehat{A_v}\wedge\delta)\vee(\widehat{A_v}\wedge\neg\delta)\big)\Big).$$

Zbog činjenice da je $\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle\widehat{A_v}$ konzistentna (sjetimo se, pretpostavili smo $S^f_{\pi^*}|w||v|$) slijedi da je jedna od formula $\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle(\widehat{A_v}\wedge\delta)$ i $\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle(\widehat{A_v}\wedge\neg\delta)$ konzistentna. No druga ne može biti konzistentna. Jer kad bi bila, onda bi i $\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle\neg\delta$ bila konzistentna, pa bi zbog $\vdash\widehat{A_w}\to[\pi^*]\delta$ formula $[\pi^*]\delta\wedge\neg[\pi^*]\delta$ bila konzistentna, što nije.

Dakle, $\widehat{A_w}\wedge\langle\pi^*\rangle(\widehat{A_v}\wedge\delta)$ je konzistentna. No tad je $\widehat{A_v}\wedge\delta$ konzistentna pa postoji atom $D\in\mathcal{D}$ takav da je $\widehat{A_v}\wedge\widehat{D}$ konzistentna. Slijedi da je $A_v\cup D$ konzistentan skup, a kako su A_v i D atomi, to povlači $A_v=D$.

Time smo dokazali da je $A_v\in\mathcal{D}$, tj. $(S^f_\pi)^*|w||v|$. $\square$

Lema 7.9. *Za sve programe $\pi \in \Pi$ vrijedi $S^f_\pi \subseteq R^f_\pi$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po strukturi programa π. Za osnovne programe a je po definiciji čak $S^f_a = R^f_a$.

Pretpostavimo da je $S^f_{\pi_1 \circ \pi_2}|w||v|$. Tada je formula $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \widehat{A_v}$ konzistentna. Koristeći aksiom (iii) zaključujemo da je i $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v}$ konzistentna.

Tehnikom korištenom u prethodnom dokazu konstruiramo atom C takav da su konzistentne formule $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle \widehat{C}$ i $\widehat{C} \wedge \langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v}$. Naime, stavimo $C_0 = \varnothing$; tada je to konzistentan skup. Dogovorno neka je $\widehat{C_0} \equiv \top$. Kao i ranije, označimo formule iz $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ sa $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$.

Pretpostavimo da smo za neki $n < m$ definirali konzistentan skup C_n takav da je formula $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle (\langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v} \wedge \widehat{C_n})$ konzistentna. Tada vrijedi:

$$\vdash \left(\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle (\langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v} \wedge \widehat{C_n})\right) \leftrightarrow \left(\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle \big(\langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v} \wedge \widehat{C_n} \wedge (\sigma_{n+1} \vee \sim\sigma_{n+1})\big)\right).$$

Ukoliko je $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle (\langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v} \wedge \widehat{C_n} \wedge \sigma_{n+1})$ konzistentna, stavimo $C_{n+1} = C_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$, inače stavimo $C_{n+1} = C_n \cup \{\sim\sigma_{n+1}\}$. Tada je C_{n+1} konzistentan skup takav da je formula $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle (\langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v} \wedge \widehat{C_{n+1}})$ konzistentna.

Dobili smo atom $C = C_m$ takav da je formula $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle (\langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v} \wedge \widehat{C})$ konzistentna. No onda su konzistentne i formule $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle \widehat{C}$ i $\widehat{C} \wedge \langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v}$. Neka je u MCS takav da je $A_u = C$. Tada vrijedi $S^f_{\pi_1}|w||u|$ i $S^f_{\pi_2}|u||v|$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $R^f_{\pi_1}|w||u|$ i $R^f_{\pi_2}|u||v|$ pa zbog $R^f_{\pi_1 \circ \pi_2} = R^f_{\pi_1} \circ R^f_{\pi_2}$ slijedi $R^f_{\pi_1 \circ \pi_2}|w||v|$.

Pretpostavimo sad da je $S^f_{\pi_1 \cup \pi_2}|w||v|$. Tada je konzistentna formula $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \widehat{A_v}$. Primjenom aksioma (iv) zaključujemo da je i $\widehat{A_w} \wedge (\langle \pi_1 \rangle \widehat{A_v} \vee \langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v})$ konzistentna. No tad je konzistentna jedna od formula $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_1 \rangle \widehat{A_v}$ i $\widehat{A_w} \wedge \langle \pi_2 \rangle \widehat{A_v}$, tj. vrijedi $S^f_{\pi_1}|w||v|$ ili $S^f_{\pi_2}|w||v|$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $R^f_{\pi_1}|w||v|$ ili $R^f_{\pi_2}|w||v|$, tj. $R^f_{\pi_1 \cup \pi_2}|w||v|$.

Konačno, slučaj programa oblika ρ^* slijedi iz prethodne leme. Naime, po pretpostavci indukcije imamo $S^f_\rho \subseteq R^f_\rho$ iz čega slijedi $(S^f_\rho)^* \subseteq (R^f_\rho)^* = R^f_{\rho^*}$. Iz leme imamo $S^f_{\rho^*} \subseteq (S^f_\rho)^*$ pa sve zajedno daje $S^f_{\rho^*} \subseteq R^f_{\rho^*}$. □

Propozicija 7.10. *Neka je Σ konačan skup formula. Tada je $\mathfrak{R}$, regularan okvir nad Σ, filtracija kanonskog modela $\mathfrak{M}$ za* **PDL** *kroz $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$.*

Dokaz. Dokažimo da za svaki $\pi \in \Pi$ vrijedi $R^f_\pi \subseteq R^l_\pi$, pri čemu je R^l_π relacija iz najveće filtracije $\mathfrak{M}^l$, kao u lemi 4.4. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po strukturi programa π. Baza slijedi iz propozicije 7.6 i činjenice da je $R^f_a = S^f_a$ za osnovni program a.

Pretpostavimo prvo da je $R^f_{\pi_1 \circ \pi_2}|w||v|$. Tada postoji MCS u takav da je $R^f_{\pi_1}|w||u|$ i $R^f_{\pi_2}|u||v|$. Iz induktivne pretpostavke slijedi $R^l_{\pi_1}|w||u|$ i $R^l_{\pi_2}|u||v|$.

Neka je ϕ formula takva da je $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ (tj. $\phi \in v$). Zbog Fischer-Ladner zatvorenosti skupa $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ slijedi da je $\langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, a onda zbog zatvorenosti na podformule i da je $\langle \pi_2 \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. Iz $R^l_{\pi_2}|u||v|$ slijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash \langle \pi_2 \rangle \phi$ (tj. $\langle \pi_2 \rangle \phi \in u$), a onda zbog $R^l_{\pi_1}|w||u|$ slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \phi$, tj. $\langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \phi \in w$. Koristeći aksiom (iii) koji se nalazi u w zaključujemo $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \phi \in w$, tj. $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \phi$. Dakle, $R^l_{\pi_1 \circ \pi_2}|w||v|$.

Sasvim analogno se pokaže da $R^f_{\pi_1 \cup \pi_2}|w||v|$ povlači $R^l_{\pi_1 \cup \pi_2}|w||v|$.

Na kraju, pretpostavimo da je $R^f_{\rho^*}|w||v|$. Tada postoji niz MCS-ova $u_0, \ldots, u_n$ takvih da je $u_0 = w$, $u_n = v$ i $R^f_\rho|u_i||u_{i+1}|$ za $0 \leqslant i < n$, tj. zbog pretpostavke indukcije $R^l_\rho|u_i||u_{i+1}|$ za $0 \leqslant i < n$.

Neka je ϕ formula takva da je $\langle \rho^* \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Podindukcijom po $m \leqslant n$ dokazujemo da je $\mathfrak{M}, u_{n-m} \Vdash \langle \rho^* \rangle \phi$. Za $m = 0$ imamo $u_n = v$ pa je $u_n \Vdash \phi$. No aksiom (v) je u u_n pa imamo $u_n \Vdash \langle \rho^* \rangle \phi$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m < n$, tj. da je $u_{n-m} \Vdash \langle \rho^* \rangle \phi$. Iz $\langle \rho^* \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ slijedi $\langle \rho \rangle \langle \rho^* \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ pa zbog $R^l_\rho|u_{n-m-1}||u_{n-m}|$ vrijedi $u_{n-m-1} \Vdash \langle \rho \rangle \langle \rho^* \rangle \phi$. Kako je aksiom (v) u u_{n-m-1}, slijedi $u_{n-m-1} \Vdash \langle \rho^* \rangle \phi$. Time je podindukcija završena.

Sad za $m = n$ imamo $u_0 = w$ pa je $w \Vdash \langle \rho^* \rangle \phi$. Dakle, $R^l_{\rho^*}|w||v|$. Time je indukcija završena.

Iz prethodne leme imamo $S^f_\pi \subseteq R^f_\pi$. Zajedno sa $R^s_\pi \subseteq S^f_\pi$ iz propozicije 7.6 i upravo dokazanim $R^f_\pi \subseteq R^l_\pi$ imamo $R^s_\pi \subseteq R^f_\pi \subseteq R^l_\pi$. Iz leme 4.4 slijedi da je $\mathfrak{R}$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ kroz $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. $\square$

Teorem 7.11. **PDL** *je slabo potpuna u odnosu na klasu svih regularnih okvira.*

Dokaz. Neka je ϕ konzistentna formula. Iz Teorema o kanonskom modelu slijedi da postoji MCS w takav da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Neka je $\mathfrak{R}$ regularan model nad $\neg\mathsf{FL}(\{\phi\})$. Iz prethodne leme, $\mathfrak{R}$ je filtracija kanonskog modela $\mathfrak{M}$ kroz $\neg\mathsf{FL}(\{\phi\})$. Iz Teorema o filtraciji slijedi $\mathfrak{R}, |w| \Vdash \phi$.

Dakle, svaka konzistentna formula ispunjiva je na regularnom modelu. Iz propozicije 5.4 slijedi da je **PDL** slabo potpuna u odnosu na klasu regularnih okvira. □

Na kraju ovog poglavlja primijetimo sljedeće. Neka je za konačan skup formula Σ definiran model $\mathfrak{R}' = (At(\Sigma), R'_\pi, V')_{\pi\in\Pi}$ čiji je nosač skup atoma nad Σ. Za osnovni program a relacija dostiživosti je definirana s $A\ R'_a\ B$ ako i samo ako je formula $\widehat{A}\wedge\langle a\rangle\widehat{B}$ konzistentna, a za složene programe relacije dostiživosti su definirane induktivno pomoću unije, kompozicije i refleksivnog tranzitivnog zatvorenja. Valuacija V' definirana je s $V'(p) = \{A \in At(\Sigma) \mid p \in A\}$ za svaku propozicionalnu varijablu p.

Tada je $\mathfrak{R}'$ izomorfan modelu $\mathfrak{R}$, regularnom modelu nad Σ. Naime, promotrimo funkciju s $W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)} \to At(\Sigma)$ danu s $|w| \mapsto A_w$. Jednostavno se provjeri da je funkcija dobro definirana, da je bijekcija i da zadovoljava uvjete (i) i (ii) iz definicije 3.6. Prema tome, to je izomorfizam modela.

Stoga modele $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{R}'$ poistovjećujemo i u nastavku koristimo bilo koji od njih, ovisno o tome odgovara li nam više pogled na regularan model nad Σ kao na filtraciju kanonskog modela, ili kao na model nad skupom atoma $At(\Sigma)$.

POGLAVLJE 3

Odlučivost i složenost

Dosad smo vidjeli što je logika **PDL** i koja je njena veza s klasom regularnih okvira. Sljedeće što nas zanima je postoje li algoritmi koji bi za zadanu formulu ϕ odlučili je li ona teorem logike **PDL**, je li **PDL**-konzistentna, je li ispunjiva na regularnom okviru te je li valjana na svakom regularnom okviru. Ako neki od tih algoritama postoji, što možemo reći o njegovoj složenosti?

U odlomku 8 uvodimo terminologiju i model izračunavanja koji omogućuju precizniju formulaciju ta dva pitanja. Dajemo i potvrdan odgovor na prvo od njih, koji se može sažeti u jednu rečenicu: **PDL** je odlučiva logika. U odlomku 9 odgovaramo i na drugo pitanje. Naime, sva četiri problema pripadaju u klasu EXPTIME-potpunih problema.

8 Odlučivost PDL

U ovom odlomku istražujemo izračunljivost problema ispunjivosti i valjanosti. Apstraktna formulacija tih problema je sljedeća:

Definicija 8.1. Neka je ϕ formula, a M klasa modela. *Problem* M-*ispunjivosti* je problem utvrđivanja je li ili nije ϕ ispunjiva na nekom modelu iz M, a *problem* M-*valjanosti* je problem utvrđivanja je li ili nije ϕ globalno istinita na svim modelima iz M, tj. je li ili nije $\mathsf{M} \Vdash \phi$.

Problemi M-ispunjivosti i M-valjanosti jedan su drugome dualni. Naime, formula ϕ je M-ispunjiva ako i samo ako *nije* $\mathsf{M} \Vdash \neg\phi$. Prema tome, ako imamo algoritam za M-valjanost, kao ulaz mu možemo dati $\neg\phi$ kako bismo testirali M-ispunjivost formule ϕ. Analogno, algoritam za M-ispunjivost može poslužiti za testiranje M-valjanosti formule.

To je bio pogled sa semantičke strane. Sa sintaktičke strane možemo govoriti o sljedećim problemima:

Definicija 8.2. Neka je ϕ formula, a Λ normalna modalna logika. Problem utvrđivanja je li ili nije ϕ Λ-konzistentna formula je *problem Λ-konzistentnosti*, a problem utvrđivanja je li ili nije $\vdash_\Lambda \phi$ je *problem Λ-dokazivosti*.

Posljedica Teorema o kanonskom modelu (tm. 6.8) je da za svaku normalnu modalnu logiku Λ postoji barem jedna klasa modela M takva da je $\Lambda = \Lambda_{\mathsf{M}}$ (npr. jednočlana klasa koja sadrži samo kanonski model za Λ). No tada se problem Λ-konzistentnosti svodi na problem M-ispunjivosti, a problem Λ-dokazivosti na problem M-valjanosti pa smo slobodni i dalje zadržati semantički pogled. To naglašavamo tako da problem Λ-konzistentnosti zovemo *problemom Λ-ispunjivosti*, a problem Λ-dokazivosti *problemom Λ-valjanosti*.

Kako bi dosadašnja rasprava o apstraktnim pojmovima kao što su „algoritam" i „problem" imala smisla, potrebno je izabrati precizan model izračunavanja i pokazati da se objekti koje razmatramo (formule i modeli) mogu reprezentirati na pogodan način.

Kao model izračunavanja poslužit će nam Turingovi strojevi. Nećemo se upuštati u njihovu formalnu definiciju, kao ni u formalnu definiciju niza pojmova koji se uz njih vežu.[1] Spomenimo samo da u kontekstu Turingovih strojeva pojam „problem" poistovjećujemo s *jezikom*—skupom riječi nad nekim konačnim alfabetom. Pritom riječi predstavljaju objekte koje razmatramo, npr. u slučaju problema Λ-ispunjivosti Λ-ispunjive formule. Dakle, umjesto da se pitamo je li formula ϕ Λ-ispunjiva, pitamo se pripada li reprezentacija formule ϕ odgovarajućem jeziku. Na takva pitanja Turingovi strojevi mogu odgovoriti prihvaćanjem ili odbijanjem reprezentacije dane kao ulaz.

Posvetimo se sada reprezentaciji formula i modela, i to u jeziku propozicionalne dinamičke logike. Ako se prisjetimo definicije 1.2, vidimo da formule same po sebi

[1] Ukoliko čitatelj nije upoznat s tim pojmovima, standardan (i odličan) udžbenik u kojem se tretiraju je [19]. Neke alternativne (ali ekvivalentne) modele izračunavanja čitatelj može pronaći u [21], zajedno s pregledom najvažnijih rezultata iz teorije izračunljivosti.

već jesu riječi, ali nad prebrojivim alfabetom. Da bismo doskočili tome, uvodimo sljedeći način označavanja propozicionalnih varijabli: slovo `p` na koje se nastavlja numerički sufiks—prirodan broj u binarnom obliku koji označava indeks propozicionalne varijable. Tako imamo, primjerice, `p1`, `p10`, `p11`, `p100` itd. Analogno, osnovne programe označavamo s `a1`, `a10`, `a11`, `a100` itd. Dakle, reprezentacija formule je riječ nad alfabetom $\{\mathtt{p}, \mathtt{a}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, (,), \vee, \neg, \bot, \langle, \rangle, \cup, \circ, *\}$. Duljinu reprezentacije formule ϕ označavamo s $|\phi|$.

Kad je riječ o reprezentaciji modela, situacija je malo škakljivija. Naime, kod modela $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$ svaka od komponenti može biti beskonačna, i još k tome imamo beskonačno mnogo relacija dostiživosti. Međutim, uočimo što je doista bitno za evaluaciju formule ϕ na modelu $\mathfrak{M}$:

- $V(p)$ samo za propozicionalne varijable p koje se doista pojavljuju u formuli ϕ, a takvih je konačno mnogo,
- R_π samo za programe π koji se javljaju u formuli ϕ, a takvih je konačno mnogo.

Nadalje, za problem **PDL**-ispunjivosti trebat će nam regularan model koji ispunjava formulu ϕ. U prethodnom poglavlju vidjeli smo da takav model, označimo ga s $\mathfrak{R}$, možemo dobiti filtracijom kanonskog modela za **PDL** kroz skup $\neg\mathsf{FL}(\{\phi\})$. Kako je $\neg\mathsf{FL}(\{\phi\})$ konačan (prop. 7.2), slijedi da $\mathfrak{R}$ ima konačno mnogo stanja (prop. 4.5). Osim toga, u $\mathfrak{R}$ su i sve relacije dostiživosti konačne, kao i svi skupovi valuacijom pridruženi propozicionalnim varijablama. Dodatna pogodnost je i ta što reprezentacija konačnih regularnih modela uopće ne mora pamtiti relacije dostiživosti za složene programe, jer se one mogu izračunati iz relacija dostiživosti za osnovne programe. Kad sve to uzmemo u obzir, dolazimo do sljedeće definicije:

Definicija 8.3. Model $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$ je *regularan model konačnog karaktera* ako je regularan, skup stanja W je konačan, relacije dostiživosti R_a su neprazne samo za konačno mnogo osnovnih programa a i skupovi $V(p)$ su neprazni samo za konačno mnogo propozicionalnih varijabli p.

Propozicija 8.4. PDL *je adekvatna i slabo potpuna u odnosu na klasu svih regularnih modela konačnog karaktera.*

Dokaz. Adekvatnost slijedi iz činjenice da je svaki **PDL**-teorem globalno istinit na svakom regularnom modelu, pa tako i regularnom modelu konačnog karaktera.

Slabu potpunost dobijemo na sljedeći način. Neka je ϕ **PDL**-konzistentna formula. Tada je ϕ ispunjiva na regularnom modelu $\mathfrak{R} = (W, R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ nad $\neg\mathsf{FL}(\{\phi\})$ za koji smo već argumentirali da je konačan. Iz njega dobijemo *reducirani model* $\mathfrak{R}' = (W, R'_\pi, V')_{\pi\in\Pi}$ tako da za osnovne programe a koji su građevni elementi programa koji se pojavljuju u ϕ stavimo $R'_a = R_a$; za ostale osnovne programe stavimo $R'_a = \varnothing$. Relacije dostiživosti za složene programe definiramo induktivno kako bi model bio regularan. Valuaciju V' definiramo tako da stavimo $V'(p) = V(p)$ za propozicionalne varijable p koje se pojavljuju u ϕ, a za ostale stavimo $V'(p) = \varnothing$. Model $\mathfrak{R}'$ je regularan model konačnog karaktera na kojem je ϕ ispunjiva. □

Napomenimo da klase modela općenito ne moraju biti skupovi. Međutim, u klasi regularnih modela konačnog karaktera postoji, do na izomorfizam, samo prebrojivo mnogo različitih modela. Stoga u iskazu prethodne propozicije možemo govoriti o *skupu* regularnih modela konačnog karaktera.

Napomenimo i da prethodna propozicija kaže da logika **PDL** ima *svojstvo konačnog modela.* Ono što je tu bitna stvar je da je **PDL** adekvatna i slabo potpuna u odnosu na neku klasu konačnih modela. Dodatak o „konačnom karakteru" je više tehničke prirode.

Regularne modele konačnog karaktera reprezentiramo kao riječi nad alfabetom $\{\mathtt{w}, \mathtt{p}, \mathtt{a}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{;}, \langle, \rangle\}$. Stanja označavamo znakom `w` na koji dodajemo numerički sufiks u binarnom obliku. Osnovne programe i propozicionalne varijable označavamo kao i prije. U konačnici, riječ koja reprezentira model je sljedećeg oblika:

$$
\begin{aligned}
\Big\langle & \langle \mathtt{w}_1\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_n\rangle\,\mathtt{;} \\
& \Big\langle \Big\langle \mathtt{a}_{i_1}\,\mathtt{;}\,\langle \mathtt{w}_e\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_f\rangle\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\,\langle \mathtt{w}_g\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_h\rangle\Big\rangle\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\Big\langle \mathtt{a}_{i_k}\,\mathtt{;}\,\langle \mathtt{w}_q\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_r\rangle\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\,\langle \mathtt{w}_s\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_t\rangle\Big\rangle\Big\rangle\,\mathtt{;} \\
& \Big\langle \Big\langle \mathtt{p}_{j_1}\,\mathtt{;}\,\langle \mathtt{w}_x\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_y\rangle\Big\rangle\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\Big\langle \mathtt{p}_{j_l}\,\mathtt{;}\,\langle \mathtt{w}_u\,\mathtt{;}\,\ldots\,\mathtt{;}\,\mathtt{w}_v\rangle\Big\rangle\Big\rangle\Big\rangle
\end{aligned}
$$

Pritom je $1 \leqslant e, f, g, h, q, r, s, t, x, y, u, v \leqslant n$. Prva komponenta (u prvom redu) predstavlja stanja u modelu, druga komponenta (u drugom redu) prestavlja relacije dostiživosti za osnovne programe, a treća komponenta (u trećem redu) predstavlja valuaciju. Pretpostavljamo da naša reprezentacija zadovoljava očite uvjete dobrog formiranja. Npr. da nema ponavljanja ni u kojoj od komponenti te da treća komponenta doista predstavlja funkciju.

Reprezentacije koje smo uveli omogućuju nam da govorimo o rekurzivnim i rekurzivno prebrojivim skupovima formula i modela. Rekurzivan skup je onaj za koji postoji Turingov stroj koji za dani ulaz u konačno mnogo koraka odlučuje predstavlja li ulaz element skupa ili ne (kako god bilo, najvažnije je da stroj u svakom slučaju *stane*). Rekurzivno prebrojiv skup je onaj za koji postoji Turingov stroj–enumerator koji uzastopce na izlaz ispisuje reprezentacije elemenata skupa, i samo njih. Pritom je važno da se svaki element prije ili kasnije pojavi na izlaznoj listi.

Prisjetimo se da smo rekli da probleme poistovjećujemo sa jezicima, tj. skupovima riječi. Kažemo da je problem *odlučiv* ako je, shvaćen kao jezik, rekurzivan. U protivnom kažemo da je *neodlučiv*.

Napomenimo da je očito moguće konstruirati Turingov stroj koji bi za danu formulu, model i stanje (tj. njihove reprezentacije) odlučio je li formula istinita na modelu u zadanom stanju. Naime, nije teško zamisliti program napisan u nekom od viših programskih jezika koji bi to radio. Prema Church-Turingovoj tezi[2] onda postoji i Turingov stroj koji bi obavio isti posao.

U nastavku se više nećemo zamarati detaljima Turingovih strojeva i reprezentacija formula i modela. Vraćamo se na apstraktni nivo. Govorit ćemo o algoritmima koje ćemo opisivati prilično neformalno. Međutim, uvijek valja imati na umu da nam Church-Turingova teza omogućuje spuštanje na nivo na kojem barem u principu sve možemo raspisati formalno i precizno.

Upotrijebimo konačno sve o čemu smo raspravljali kako bismo iskazali i dokazali glavni rezultat ovog odlomka. Reći ćemo da je normalna modalna logika Λ *odlučiva* ako je odlučiv problem Λ-ispunjivosti (ili ekvivalentno: Λ-valjanosti). Dakle, Λ je odlučiva ako i samo ako je rekurzivna. Ako Λ nije odlučiva, kažemo da je *neodlučiva*.

Teorem 8.5. **PDL** *je odlučiva.*

Dokaz. **PDL** ima rekurzivan skup aksioma pa je rekurzivno prebrojiva[3]. Neka je R

[2]Church-Turingova teza, poznata i kao Churchova teza, otprilike kaže da sve što je izračunljivo, izračunljivo je na Turingovom stroju. Drugim riječima, Turingov stroj je model izračunavanja koji dobro pogađa intuitivan koncept izračunljivosti, tj. algoritamske rješivosti. Za detalje i precizniju formulaciju pogledati [19] ili [21].

[3]Ovo nije sasvim trivijalna tvrdnja. Intuitivno, mogli bismo konstruirati Turingov stroj koji

skup svih međusobno neizomorfnih regularnih modela konačnog karaktera. Očito je i R rekurzivno prebrojiv. Prema propoziciji 8.4 imamo **PDL** $= \Lambda_{\mathsf{R}}$.

Neka je M_1 Turingov stroj–enumerator koji generira **PDL**-teoreme, tj. formule globalno istinite na R, a M_2 enumerator koji generira regularne modele konačnog karaktera. Opišimo Turingov stroj M_3 koji odlučuje problem **PDL**-valjanosti.

Neka je zadana formula ϕ. M_3 ponavlja sljedeće korake:

1. Generiraj pomoću M_1 sljedeći **PDL**-teorem. Ako je on jednak ϕ, prihvati ϕ.
2. Generiraj pomoću M_2 sljedeći regularni model konačnog karaktera. Ako je $\neg\phi$ ispunjiva na njemu, odbaci ϕ.
3. Vrati se na korak 1.

Ukoliko je ϕ **PDL**-teorem, očito će prije ili kasnije biti prihvaćena u prvom koraku. U protivnom je $\neg\phi$ ispunjiva na regularnom modelu konačnog karaktera pa će prije ili kasnije ϕ biti odbačena u drugom koraku. U svakom slučaju, M_3 će stati pa on odlučuje problem **PDL**-valjanosti. □

9 EXPTIME-potpunost PDL

Ustanovili smo da je problem ispunjivosti za **PDL** odlučiv. Sljedeće što nas zanima je što možemo reći o njegovoj vremenskoj složenosti. Kao što ćemo vidjeti, problem **PDL**-ispunjivosti je EXPTIME-potpun[4].

Klasa EXPTIME sadrži probleme koji su odlučivi na determinističkom Turingovom stroju u vremenu eksponencijalnom s obzirom na duljinu ulaza. Kažemo da je problem P EXPTIME-težak ako se svaki problem E iz klase EXPTIME može vremenski polinomno reducirati na njega. To znači da za svaki problem E iz klase EXPTIME postoji Turingov stroj koji u polinomnom vremenu instancu problema E prevodi u instancu problema P, što nam omogućuje da algoritam koji rješava P

bi ispisivao **PDL**-teoreme. On bi krenuo od aksioma i uzastopno primjenjivao pravila izvoda na već ispisane formule kako bi dobio nove formule. Moralo bi se pripaziti na redoslijed ispisivanja kako bi se svaki teorem prije ili kasnije pojavio na listi.

[4] Za preciznu definiciju klasa vremenske složenosti, kao i svih pojmova iz teorije složenosti koji se koriste u ovom odlomku, čitatelj se upućuje na već spomenutu knjigu [19].

iskoristimo kako bismo riješili E. U tom smislu EXPTIME-teški problemi su barem toliko teški koliko i najteži problemi iz klase EXPTIME.

EXPTIME-potpuni problemi su problemi koji su EXPTIME-teški, i još se k tome nalaze u klasi EXPTIME. Dakle, to su najteži predstavnici te klase. Jedna od posljedica teorema o vremenskoj hijerarhiji[5] je da je $\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{EXPTIME}$, pri čemu je P klasa problema koji su na determinističkom Turingovom stroju odlučivi u polinomnom vremenu. Budući da se jedino problemi iz P smatraju *praktično* rješivima, to znači da su EXPTIME-potpuni problemi *neukrotivi* (engl. *intractable*), tj. za iole veće ulaze bilo koji algoritam koji ih rješava će se naprosto predugo izvršavati.

Postavlja se pitanje koji je uzrok tolike vremenske složenosti problema ispunjivosti za **PDL**. Kao što se može i pretpostaviti, glavni krivci su modalni operatori oblika $[a^*]$ koji „pretražuju" refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije R_a. Oni mogu prisiliti modele da budu eksponencijalno „duboki". Bolji uvid daje nam sljedeća propozicija:

Propozicija 9.1. *Za svaki prirodan broj n postoji formula κ_n ispunjiva na regularnom modelu, duljine $\mathcal{O}(n^2)$ i takva da svaki regularan model na kojem je ispunjiva sadrži niz od 2^n različitih stanja:*

$$w_0\, R_a\, w_1 \dots w_{2^n-2}\, R_a\, w_{2^n-1}.$$

Nadalje, jedini modalni operatori koji nastupaju u κ_n su $[a]$ i $[a^*]$, pri čemu je a osnovni program.

Dokaz. Pokazat ćemo da koristeći jezik propozicionalne dinamičke logike možemo implementirati brojač koji postavlja uvjet na minimalan broj stanja u modelu. Za zadani pozitivan prirodan broj n neka su $q_0, \dots, q_{n-1}$ različite propozicionalne varijable. S $V(q_i, w)$ označimo istinitost varijable q_i u stanju w nekog modela; ako je q_i istinita u w, stavljamo $V(q_i, w) = 1$, u protivnom $V(q_i, w) = 0$. Tada lista $[V(q_{n-1}, w), \dots, V(q_i, w), \dots, V(q_0, w)]$ predstavlja n-bitan binaran zapis prirodnog broja, pri čemu je $V(q_{n-1}, w)$ najznačajnija, a $V(q_0, n)$ najmanje značajna znamenka.

[5]Pogledati [19, str. 341].

Konstruiramo formulu κ_n koja, ako je istinita u stanju w_0, osigurava postojanje niza od 2^n stanja:

$$w_0\; R_a\; w_1 \dots w_k\; R_a\; w_{k+1} \dots w_{2^n-2}\; R_a\; w_{2^n-1}.$$

Pritom za stanje w_k lista $[V(q_{n-1}, w_k), \dots, V(q_0, w_k)]$ predstavlja n-bitan binaran zapis broja k. Primjerice, za $n = 2$ model će sadržavati stanja $w_0, \dots, w_3$. Kako se pomičemo s jednog stanja na drugo, nailazimo na sljedeće liste istinosnih vrijednosti: $[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]$. Upravo činjenica da stanja s različitim indeksima imaju različite liste istinosnih vrijednosti osigurava da su sva stanja w_k međusobno različita.

Da bismo izveli željenu konstrukciju, promotrimo kako se promijeni binaran zapis broja kad mu dodamo 1. Pretpostavimo da je $n = 6$ i da se radi o broju sa zapisom 010111. Nakon uvećavanja, zapis je 011000. Promjenu možemo formulirati ovako: ako je i, $0 \leqslant i < n$, najmanji broj takav da je znamenka na poziciji i jednaka 0, onda se znamenke na pozicijama manjim ili jednakim i promijene, a znamenke na pozicijama većim od i ostaju iste. Promjenu u jeziku propozicionalne dinamičke logike možemo zapisati sa sljedećih n formula, za $0 \leqslant i < n$:

$$\begin{aligned} \varphi_i \equiv & \Bigg(\neg q_i \wedge \bigwedge_{0\leqslant j<i} q_j\Bigg) \rightarrow \\ & \Bigg([a]\Big(q_i \wedge \bigwedge_{0\leqslant j<i} \neg q_j\Big) \wedge \bigwedge_{i<j<n} \Big((q_j \rightarrow [a]q_j) \wedge (\neg q_j \rightarrow [a]\neg q_j)\Big)\Bigg). \end{aligned}$$

Pritom dogovorno praznu konjunkciju smatramo identičnom logičkoj konstanti $\top$.

Sad traženu formulu κ_n možemo definirati ovako:

$$\kappa_n \equiv (\neg q_{n-1} \wedge \dots \wedge \neg q_0) \wedge [a^*]\langle a\rangle\top \wedge [a^*] \bigwedge_{0\leqslant i<n} \varphi_i\,.$$

Prvi dio konjunkcije inicijalizira brojač na 0, drugi dio osigurava da za svako stanje u nizu postoji sljedbenik, a treći dio osigurava da se uvećavanje za 1 odvija kako treba. Očito je duljina formule κ_n $\mathcal{O}(n^2)$ i koriste se samo dozvoljeni modalni operatori $[a]$ i $[a^*]$. Iz konstrukcije je jasno da je formula ispunjiva na regularnom modelu i da svaki regularan model koji je ispunjava ima traženi niz od barem 2^n različitih stanja. $\square$

Dokaz EXPTIME-potpunosti problema **PDL**-ispunjivosti dijelimo na dva dijela. Prvo dokazujemo da je problem EXPTIME-težak redukcijom s jedne varijante problema popločavanja za koju je poznato da je EXPTIME-potpuna. U drugom dijelu dajemo algoritam koji za zadanu formulu ϕ u eksponencijalnom vremenu konstruira regularan model konačnog karaktera $\mathfrak{M}$ za koji vrijedi da je ϕ ispunjiva na regularnom modelu ako i samo ako je ispunjiva na $\mathfrak{M}$. Algoritam se bazira na eliminaciji Hintikkinih skupova.

EXPTIME-težina preko problema popločavanja

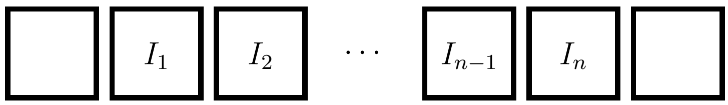
Problemi popločavanja predstavljaju vrstu problema koja je izrazito pogodna za dokazivanje raznih rezultata o izračunljivosti i složenosti modalnih logika. Naime, postoje neodlučivi problemi popločavanja pa neodlučivost neke modalne logike možemo dokazati redukcijom s jednog od takvih problema. Ono što je nama zanimljivo je da postoje i EXPTIME-teški problemi popločavanja koje možemo polinomno reducirati na problem **PDL**-ispunjivosti. Do jednog takvog (koji je čak EXPTIME-potpun) doći ćemo promatrajući *igru popločavanja koridora za dva igrača.*

Prije nego se upustimo u opisivanje te igre, objasnimo ukratko kako funkcioniraju dokazi redukcijom. Naime, pretpostavimo da imamo problem P koji je EXPTIME-težak. To znači da svaki problem iz klase EXPTIME možemo polinomno reducirati na P. Neka je Q problem za koji smo pokazali da se P na njega može polinomno reducirati. Tada proizvoljan problem E iz klase EXPTIME prvo polinomno reduciramo na P, a zatim na Q. Komponiranjem te dvije redukcije ostvarili smo polinomnu redukciju problema E na problem Q, što znači da je i Q EXPTIME-težak.

Opišimo igru popločavanja koridora. Prvo, pločica T je 1×1 kvadrat fiksne orijentacije čija je svaka stranica obojana nekom bojom. Na te boje se referiramo s $lijevo(T)$, $desno(T)$, $gore(T)$ i $dolje(T)$. Dvoje igrača, Eva i Adam, imaju na raspolaganju konačan skup $\{T_1, T_2, \ldots, T_s\}$ različitih uzoraka pločica; od svakog na raspolaganju imaju beskonačno mnogo primjeraka. Tim pločicama popločavaju koridor—pravokutnu mrežu koja je širine n, odozdo je ograničena, a prema gore se proteže u beskonačnost. Pritom je bitno da susjedne pločice imaju stranice kojima se dodiruju obojane istom bojom.

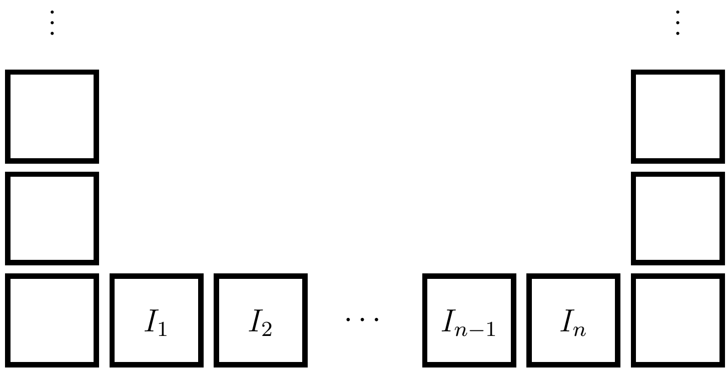
Osim spomenutih uzoraka, u igri su još dva specijalna, označena s T_0 i T_{s+1}. T_0 služi isključivo za označavanje granica koridora. Zamišljamo ga kao da su mu sve stranice obojane nekom istaknutom bojom, npr. bijelom. T_{s+1} je pobjednička pločica čiju ulogu objašnjavamo kasnije.

Na početku igre u prvi red se postavljaju početne pločice $I_1, \ldots, I_n$. Možemo zamišljati da ih odabire sudac koji osim toga pazi da se u nastavku igra odvija prema pravilima. Sudac lijevo od pločice I_1 i desno od I_n postavlja bijelu pločicu T_0, tako da prvi red koridora izgleda kao na slici 9.1.



Slika 9.1: Prvi red koridora

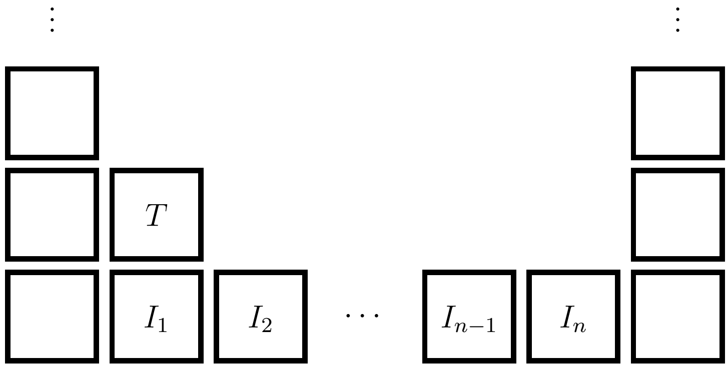
Zapravo možemo smatrati da sudac odmah ispuni stupce 0 i $n+1$ bijelim, graničnim pločicama, tako da igrači postavljaju svoje pločice u unutrašnjost koridora s n stupaca (vidi sliku 9.2).



Slika 9.2: Početni izgled koridora

Kad je sve spremno, Eva i Adam mogu krenuti s popločavanjem. Njih dvoje naizmjence stavljaju po jednu pločicu u koridor, s tim da Eva uvijek počinje prva. Mjesto na koje igrač koji je na potezu stavlja pločicu strogo je određeno: koridor se mora popunjavati odozdo prema gore, slijeva nadesno. Nakon prvog Evinog poteza koridor izgleda kao na slici 9.3.

Adam mora odgovoriti postavljanjem pločice neposredno desno od T. Kad ispune čitav red pločicama, igrači prelaze u sljedeći i to tako da opet počnu od



Slika 9.3: Koridor nakon prvog Evinog poteza

stupca 1. Dakle, igrači ne mogu slobodno odlučiti na koje mjesto će postaviti pločicu, nego isključivo kakav uzorak će odabrati. Pritom moraju paziti da su stranice kojima se susjedne pločice dodiruju obojane istom bojom (to se odnosi i na pločice u prvom i n-tom stupcu koje se moraju slagati s bijelim graničnim pločicama; primjerice, na slici 9.3 mora biti $lijevo(T) = bijela$.)

Ostaje još odrediti kad netko od igrača pobjeđuje ili gubi. U slučaju da je u konačno mnogo poteza konstruirano popločavanje takvo da se u prvom stupcu nalazi pločica tipa T_{s+1}, pobjeđuje Eva. U protivnom, ako nitko od igrača ne može napraviti legalan potez, a T_{s+1} nije u prvom stupcu, ili ako se igra odvija beskonačno dugo, Adam pobjeđuje.

Postavlja se pitanje: ako je zadana igra (tj. zadane su dozvoljene pločice $T_0, \dots, T_{s+1}$ i inicijalne pločice $I_1, \dots, I_n$), ima li Eva pobjedničku strategiju? Da bismo precizirali što pod tim mislimo, razmišljajmo u terminima *stabla igre* u kojem vrhovi predstavljaju pozicije igre (trenutno dovršena popločavanja), a usmjereni bridovi legalne poteze. Pritom je važno da za Evine pozicije u stablu budu zabilježene sve moguće pozicije do kojih Adam može legalno doći (takvih je konačno jer Adam ima konačan izbor uzoraka pločica).

Rekurzivno definiramo pojam *pobjedničke pozicije za Evu* u stablu igre:

(i) Ako je u nekoj poziciji pločica T_{s+1} postavljena u prvom stupcu, ta pozicija je pobjednička za Evu.

(ii) U slučaju da je Eva na potezu u poziciji x, ta pozicija je pobjednička za nju ako postoji legalan potez koji vodi u pobjedničku poziciju.

(iii) U slučaju da je Adam na potezu u poziciji x, ta pozicija je pobjednička za Evu ako Adam može napraviti legalan potez i svaki takav potez vodi u pobjedničku poziciju za Evu.

Kažemo da Eva ima *pobjedničku strategiju* ako i samo ako postoji stablo igre u kojem je korijen pobjednička pozicija za Evu. Problem određivanja ima li Eva pobjedničku strategiju zove se *problem popločavanja koridora za dvije osobe.* Poznato je da je taj problem EXPTIME-potpun [6].

Teorem 9.2. *Problem ispunjivosti za* **PDL** *je* EXPTIME-*težak.*

Dokaz. Redukcijom s problema popločavanja koridora za dvije osobe. Na stablo igre gledat ćemo kao na ukorijenjen regularan model s obzirom na istaknutu relaciju dostiživosti R_m za osnovni program m. Ako s W označimo skup stanja, to znači da postoji stanje $w \in W$, koje zovemo korijen, sa svojstvom da za sve $v \in W$ vrijedi $(R_m)^*wv$. Stanja u modelu predstavljaju pozicije igre, a relacija R_m kodira legalne poteze.

Za zadanu instancu igre $\mathcal{T} = (s, n, \{T_0, \ldots, T_{s+1}\}, \{I_1, \ldots, I_n\})$ konstruirat ćemo formulu $\phi_{\mathcal{T}}$ sa sljedeća tri svojstva:

(i) Ako Eva ima pobjedničku strategiju, $\phi_{\mathcal{T}}$ je ispunjiva u korijenu nekog stabla igre za $\mathcal{T}$ (tj. ukorijenjenog regularnog modela).

(ii) Ako je $\phi_{\mathcal{T}}$ ispunjiva na regularnom modelu, Eva ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{T}$. Štoviše, pobjedničku strategiju možemo pročitati tako da, počevši u stanju u kojem je $\phi_{\mathcal{T}}$ istinita, slijedimo niz stanja od kojih je svako sljedeće dostiživo preko R_m iz prethodnog, a koja predstavljaju pobjedničke pozicije u ispunjavajućem modelu.

(iii) Formula $\phi_{\mathcal{T}}$ se može konstruirati u vremenu polinomijalnom u n i s.

Formula $\phi_{\mathcal{T}}$ je takva da potpuno opisuje strukturu stabla igre i izražava nužne i dovoljne uvjete za postojanje pobjedničke strategije za Evu. Stoga konstrukciju dijelimo u dva dijela. U prvom dijelu pomoću jezika propozicionalne dinamičke logike opisujemo početnu konfiguraciju koridora, tijek igre (da igrači naizmjence povlače poteze), podudaranje boja itd. U drugom dijelu pronalazimo formule koje izražavaju rekurzivnu karakterizaciju pobjedničke pozicije i onemogućuju da se igra odvija u beskonačno mnogo poteza.

Slijedi popis oznaka za propozicionalne varijable koje se pojavljuju u $\phi_{\mathcal{T}}$:

(i) $t_0, t_1, \ldots, t_s, t_{s+1}$. Koristimo ih za reprezentaciju dozvoljenih pločica. Umjesto t_0 ponegdje koristimo i oznaku $bijela$.

(ii) eva. Ova propozicionalna varijabla označava da je Eva sljedeća na potezu. Njena negacija označava da je Adam na potezu.

(iii) $pos_1, \ldots, pos_n$. Propozicionalnu varijablu pos_i koristimo kako bismo označili da se u trenutnom potezu pločica postavlja u stupac i.

(iv) $col_i(t)$, za sve $0 \leqslant i \leqslant n+1$ i sve $t \in \{t_0, \ldots, t_{s+1}\}$. Ove propozicionalne varijable koristimo kako bismo označili da je u prethodnom potezu u stupac i postavljena pločica t.

(v) $pobjeda$. Ova propozicionalna varijabla označava da je trenutna pozicija pobjednička za Evu.

Od modalnih operatora koristimo $[m]$ i $\langle m\rangle$ („nakon svakog mogućeg poteza" i „nakon nekog mogućeg poteza") te $[m^*]$, koji možemo čitati kao „nakon svakog mogućeg konačnog niza poteza".

Sljedeća formula opisuje situaciju na početku igre:

$$eva \wedge pos_1 \wedge col_0(bijela) \wedge col_1(t_{I_1}) \wedge \ldots \wedge col_n(t_{I_n}) \wedge col_{n+1}(bijela).$$

Dakle, na potezu je Eva, a pločica ide u prvi stupac. Ostatak formule jednostavno opisuje prvi red koridora (slika 9.1) koji postavlja sudac prije nego igrači počnu igrati.

Slijedi niz formula koje opisuju daljnji tijek igre. Sve one počinju modalnim operatorom $[m^*]$ kako bismo osigurali da vrijede nakon svakog konačnog niza poteza. Prvo dajemo traženi smisao varijablama pos_i i $col_i(t)$:

- Pločice uvijek moraju biti postavljene u *barem* jedan od stupaca 1 do n:

  $$[m^*](pos_1 \vee \ldots \vee pos_n),$$

  i u *najviše* jedan od tih stupaca:

  $$[m^*](pos_i \to \neg pos_j), \qquad \text{za sve } i, j,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

- U svakom stupcu i prije je postavljena barem jedna pločica:

$$[m^*](col_i(t_0) \vee \ldots \vee col_i(t_{s+1})), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n+1.$$

- U svakom stupcu i prije je postavljena najviše jedna pločica:

$$[m^*](col_i(t_u) \rightarrow \neg col_i(t_v)), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n+1,\ 0 \leqslant u \neq v \leqslant s+1.$$

- Sudac je postavio bijele pločice u stupce 0 i $n+1$:

$$[m^*](col_0(bijela) \wedge col_{n+1}(bijela)).$$

- Tokom igre, pločice se postavljaju slijeva nadesno, s povratkom u prvi stupac kad se red ispuni:

$$[m^*]((pos_1 \rightarrow [m]pos_2) \wedge (pos_2 \rightarrow [m]pos_3) \wedge \ldots \wedge (pos_n \rightarrow [m]pos_1)).$$

- Stupci u koje se ne postavlja pločica se ne mijenjaju kad se napravi potez:

$$[m^*]\Big(\neg pos_i \rightarrow \Big((col_i(t_u) \rightarrow [m]col_i(t_u)) \wedge (\neg col_i(t_u) \rightarrow [m]\neg col_i(t_u))\Big)\Big),$$

  pri čemu je $1 \leqslant i \leqslant n$ i $0 \leqslant u \leqslant s+1$.

U nastavku navodimo formule koje opisuju strukturu stabla igre:

- Igrači su naizmjence na potezu:

$$[m^*]((eva \rightarrow [m]\neg eva) \wedge (\neg eva \rightarrow [m]eva)).$$

- Igrači povlače samo legalne poteze, tj. postavljaju pločice tako da se odgovarajuće boje na susjednim pločicama podudaraju. Radi konciznijeg zapisa uvodimo ternarnu relaciju kompatibilnosti na propozicionalnim varijablama $t_0, \ldots, t_{n+1}$:

$$C(t', t, t'') \text{ ako i samo ako je } \quad desno(T') = lijevo(T) \text{ i } dolje(T) = gore(T''),$$

  pri čemu su T, T' i T'' pločice koje odgovaraju varijablama t, t' i t''. Dakle, $C(t', t, t'')$ vrijedi ako i samo ako se T može postaviti desno od pločice T' i iznad pločice T''. Uz pomoć definirane relacije formuliramo ograničenja na postavljanje pločica:

$$[m^*]\Big((pos_i \wedge col_{i-1}(t') \wedge col_i(t'')) \rightarrow [m] \bigvee\{col_i(t) \mid C(t', t, t'')\}\Big).$$

Pritom je $1 \leqslant i \leqslant n$ te dogovorno smatramo da je $\bigvee \varnothing \equiv \bot$.

- Uz ta ograničenja moramo dodati još i osiguranje da se pločica postavljena u stupac n slaže s bijelom pločicom u stupcu $n+1$:

  $$[m^*]\Big(pos_n \rightarrow [m] \bigvee\{col_n(t) \mid desno(T) = bijela\}\Big).$$

  Pritom propozicionalna varijabla t odgovara pločici T.

- Nadalje, moramo osigurati da su svi mogući Adamovi odgovori na Evin potez zabilježeni u modelu:

  $$[m^*]\Big((\neg eva \wedge pos_i \wedge col_{i-1}(t') \wedge col_i(t'')) \rightarrow \bigwedge\{\langle m\rangle col_i(t) \mid C(t', t, t'')\}\Big).$$

  Pritom je $1 \leqslant i \leqslant n$ te dogovorno smatramo da je $\bigwedge \varnothing \equiv \top$.

Time smo završili opis stabla igre. Sad moramo dodati formule kojima ćemo uhvatiti rekurzivnu karakterizaciju Evine pobjedničke pozicije. Bazu je jednostavno opisati, dodajemo formulu koja osigurava da je početna pozicija pobjednička za Evu:

$$pobjeda.$$

Dodajemo formulu koja opisuje rekurzivne uvjete:

$$[m^*]\Big(pobjeda \rightarrow (col_1(t_{s+1}) \vee (\neg eva \wedge \langle m\rangle\top \wedge [m]pobjeda) \vee (eva \wedge \langle m\rangle pobjeda))\Big).$$

Ostaje još otkloniti mogućnost Evine pobjede ukoliko se igra odvija u beskonačno mnogo poteza. Da bismo to napravili, primijetimo da postoji samo konačno mnogo različitih mogućih redova, i to najviše $2(s+2)^n$ (dvojka je tu jer u slučaju neparnog n razlikujemo redove u kojima prvu pločicu stavlja Eva od onih u kojima prvu pločicu stavlja Adam). Stoga nakon prvih $N = 2n(s+2)^n$ poteza sigurno dolazi do ponavljanja pozicija. To ne pomaže Evi; ako ne može pobijediti u najviše N poteza, ne može uopće pobijediti. Zato inzistiramo da igre ne traju više od N poteza.

Taj zahtjev postižemo upotrebom brojača iz dokaza propozicije 9.1. Neka je $k = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ i neka su $q_0, \ldots, q_{k-1}$ međusobno različite propozicionalne varijable koje su različite od dosad uvedenih. Formule φ_i za $0 \leqslant i < k$ neka su kao u dokazu propozicije 9.1. Dodajemo formulu:

$$(\neg q_{k-1} \wedge \ldots \wedge \neg q_0) \wedge [m^*] \bigwedge_{0 \leqslant i < k} \varphi_i \,.$$

Ukoliko brojač dođe do N, Adam pobjeđuje. Zbog jednostavnosti dat ćemo si oduška i dozvoliti da brojač dođe do maksimalnog broja koji možemo zapisati k-bitnim binarnim zapisom:

$$[m^*]((q_{k-1} \wedge \ldots \wedge q_0) \to [m]\neg pobjeda).$$

Formula $\phi_{\mathcal{T}}$ neka je konjunkcija svih dosad uvedenih formula. Prvo moramo provjeriti da $\phi_{\mathcal{T}}$ doista ima tri svojstva navedena na početku dokaza.

Ukoliko Eva ima pobjedničku strategiju, ima i strategiju s kojom pobjeđuje u najviše N poteza. Neka je $\mathfrak{M}$ ukorijenjen regularan model koji odgovara toj pobjedničkoj strategiji. Prema konstrukciji formule $\phi_{\mathcal{T}}$, očito je ona istinita u korijenu modela $\mathfrak{M}$.

S druge strane, ako postoji regularan model $\mathfrak{M}$ i njegovo stanje w takvo da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi_{\mathcal{T}}$, moramo pokazati da Eva ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{T}$. Pa pretpostavimo da takav model i stanje postoje. Tada je u w istinita propozicionalna varijabla *pobjeda*, a onda je istinit i treći disjunkt u rekurzivnoj karakterizaciji pobjedničke pozicije, $eva \wedge \langle m \rangle pobjeda$. Stoga Eva može odabrati potez koji je vodi u poziciju koja je označena kao pobjednička. Isto može činiti i u nadolazećim rundama, što osigurava da se Eva stalno nalazi u pobjedničkim pozicijama.

No, može li Eva pobjediti u konačno mnogo poteza? Da, jer pretpostavimo da je upravo odigran N-ti potez (točnije, potez čiji broj u k-bitnom binarnom zapisu ima sve znamenke jednake 1). Kako je Eva stalno birala poteze koji je vode u pobjedničke pozicije, i pozicija u kojoj se trenutno nalazi je pobjednička. Stoga je istinita jedna od sljedećih formula:

- $col_1(t_{s+1})$,
- $\neg eva \wedge \langle m \rangle \top \wedge [m] pobjeda$,
- $eva \wedge \langle m \rangle pobjeda$.

Brojač osigurava da je istinita formula $[m]\neg pobjeda$, prema tome, druga i treća formula ne mogu biti istinite. Ostaje formula $col_1(t_{s+1})$, što znači da je pobjednička pločica već postavljena u prvi stupac. No onda je Eva već pobijedila.

Za kraj, ostaje provjeriti da je duljina formule $\phi_{\mathcal{T}}$ polinomijalna u n i s. No, očito jest. Jedino što valja komentirati je da k, broj varijabli kojima kodiramo N, nije prevelik. Imamo

$$k = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1 \leqslant 2 + \log_2 n + n \log_2(s+2),$$

pa je evidentno $k = \mathcal{O}(n(s+2))$, što je dovoljno dobra asimptotska ocjena. □

Eliminacija Hintikkinih skupova

Teoremom 9.2 uspostavili smo donju ogradu na vremensku složenost problema **PDL**-ispunjivosti: problem je EXPTIME-težak. Ostaje nam pokazati da možemo uspostaviti i pripadnu gornju ogradu i time ustanoviti da je problem EXPTIME-potpun. To ćemo napraviti tako da opišemo konkretan eksponencijalni algoritam za problem **PDL**-ispunjivosti. Algoritam se bazira na konceptu Hintikkinih skupova.

Definicija 9.3 (Hintikkini skupovi za **PDL**). Neka je Σ skup formula u jeziku propozicionalne dinamičke logike, a $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ kao u definiciji 7.1. *Hintikkin skup* nad Σ je podskup H od $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) $\bot \notin H$.

(ii) Ako je $\neg\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, onda je $\neg\phi \in H$ ako i samo ako $\phi \notin H$.

(iii) Ako je $\phi \vee \psi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, onda je $\phi \vee \psi \in H$ ako i samo ako je $\phi \in H$ ili $\psi \in H$.

(iv) Ako je $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, onda je $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \phi \in H$ ako i samo ako je $\langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \phi \in H$.

(v) Ako je $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, onda je $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \phi \in H$ ako i samo ako je $\langle \pi_1 \rangle \phi \in H$ ili $\langle \pi_2 \rangle \phi \in H$.

(vi) Ako je $\langle \pi^* \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, onda je $\langle \pi^* \rangle \phi \in H$ ako i samo ako je $\phi \in H$ ili $\langle \pi \rangle \langle \pi^* \rangle \phi \in H$.

Skup svih Hintikkinih skupova nad Σ označavamo s $Hin(\Sigma)$.

Uvjet (ii) u prethodnoj definiciji osigurava maksimalnost Hintikkinih skupova: ako je $H \in Hin(\Sigma)$, onda ne postoji $H' \in Hin(\Sigma)$ takav da je $H \subsetneq H'$. Uvjeti (ii) i (iii) zajedno povlače i analogone za ostale logičke veznike ($\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) definirane preko $\neg$ i $\vee$. Primjerice, ako je $\phi \wedge \psi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$, onda je $\phi \wedge \psi \in H$ ako i samo ako je $\phi \in H$ i $\psi \in H$.

Primijetimo da to znači da Hintikkin skup H ne može sadržavati očite propozicionalne inkonzistencije, npr. ne može biti $\phi \wedge \neg\phi \in H$. Međutim, Hintikkini skupovi ne moraju biti konzistentni[6] jer inkonzistentnost može nastati na modalnoj razini. Primjerice, neka je $\Sigma = \{\langle a \rangle (p \wedge \neg p)\}$ za osnovni program a i propozicionalnu varijablu p. Tada je

$$\neg\mathsf{FL}(\Sigma) = \{\neg\langle a \rangle (p \wedge \neg p), \langle a \rangle (p \wedge \neg p), \neg(p \wedge \neg p), p \wedge \neg p, p, \neg p\}.$$

Jedan od Hintikkinih skupova je $H = \{p, \neg(p \wedge \neg p), \langle a \rangle (p \wedge \neg p)\}$, koji evidentno nije konzistentan.

Što se tiče konzistentnih Hintikkinih skupova, o njima je već bilo govora. Lako se provjeri da su to upravo atomi (definicija 7.3). Dakle, $At(\Sigma) \subseteq Hin(\Sigma)$.

Hintikkine skupove koristimo tako da konstruiramo model $\mathfrak{M}^0$ koristeći kao nosač skup $Hin(\Sigma)$. Zatim iterativnom eliminacijom Hintikkinih skupova koji nam ne odgovaraju dobivamo sve manje i manje modele. Proces je deterministički i zaustavlja se nakon najviše eksponencijalno mnogo koraka. Na kraju nam ostane model $\mathfrak{M}$, regularan model konačnog karaktera. Pokazat ćemo da je formula ψ ispunjiva ako i samo ako je ispunjiva na $\mathfrak{M}$.

Eliminacija Hintikkinih skupova:

Baza. Neka je Σ konačan skup formula u jeziku propozicionalne dinamičke logike. Definiramo $W^0 = Hin(\Sigma)$. Za sve osnovne programe a od kojih su građeni programi koji nastupaju u formulama iz skupa Σ i sve $H, H' \in W^0$ definiramo binarne relacije Q_a^0 tako da bude $H\, Q_a^0\, H'$ ako i samo ako za sve formule $\phi \in H'$, $\langle a \rangle \phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ povlači $\langle a \rangle \phi \in H$. Za ostale osnovne programe relacije dostiživosti

[6] Odsad pa nadalje, kad kažemo konzistentnost, mislimo na **PDL**-konzistentnost. Analogno, kad govorimo o ispunjivosti, mislimo na ispunjivost na regularnom modelu (ili, ekvivalentno, regularnom modelu konačnog karaktera).

ostavimo prazne, a za složene programe ih definiramo induktivno. Valuaciju V^0 definiramo s $V^0(p) = \{H \in W^0 \mid p \in H\}$, za sve propozicionalne varijable p koje nastupaju u formulama iz skupa Σ; za ostale propozicionalne varijable stavimo $V^0(p) = \varnothing$. Označimo $\mathfrak{F}^0 = (W^0, Q^0_\pi)_{\pi\in\Pi}$ i $\mathfrak{M}^0 = (\mathfrak{F}^0, V^0)$.

Induktivni korak. Pretpostavimo da smo za $n \geqslant 0$ definirali okvir $\mathfrak{F}^n = (W^n, Q^n_\pi)_{\pi\in\Pi}$ i model $\mathfrak{M}^n = (\mathfrak{F}^n, V^n)$. Kažemo da je $H \in W^n$ *zadovoljavajući* ako i samo ako za sve programe π i sve formule ψ, ako je $\langle\pi\rangle\psi \in H$, onda postoji $H' \in W^n$ takav da je $H\, Q^n_\pi\, H'$ i vrijedi $\psi \in H'$. Definiramo:

(i) $W^{n+1} = \{H \in W^n \mid H \text{ je zadovoljavajući}\}$.

(ii) Za osnovne programe a je $Q^{n+1}_a = Q^n_a \cap (W^{n+1} \times W^{n+1})$, a za složene programe relacije dostiživosti su definirane induktivno. $\mathfrak{F}^{n+1}$ je $(W^{n+1}, Q^{n+1}_\pi)_{\pi\in\Pi}$.

(iii) V^{n+1} je definirana s $V^{n+1}(p) = V^n(p) \cap W^{n+1}$ za sve propozicionalne varijable p, a $\mathfrak{M}^{n+1}$ je $(\mathfrak{F}^{n+1}, V^{n+1})$.

Kako je $Hin(\Sigma)$ konačan, a $W^{n+1} \subseteq W^n$, ovaj induktivni proces u jednom trenutku prestaje stvarati nove strukture. Preciznije, postoji $m \geqslant 0$ takav da je za svaki $j \geqslant m$, $\mathfrak{F}^j = \mathfrak{F}^m$ i $\mathfrak{M}^j = \mathfrak{M}^m$. Definiramo $\mathfrak{F} = (W, Q_\pi)_{\pi\in\Pi} = \mathfrak{F}^m$ i $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V) = \mathfrak{M}^m$.

Pretpostavimo da je $\Sigma = \{\psi\}$ za zadanu formulu ψ. Budući da skup $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ sadrži najviše $\mathcal{O}(|\psi|)$ formula (prop. 7.2), skup $Hin(\Sigma)$ sadrži najviše $\mathcal{O}(2^{|\psi|})$ elemenata. Stoga je konstrukcija Hintikkinih skupova, a time i početnog modela $\mathfrak{M}^0$, moguća u determinističkom eksponencijalnom vremenu. Nadalje, svaki korak konstrukcije modela $\mathfrak{M}^{n+1}$ iz modela $\mathfrak{M}^n$ moguće je obaviti u determinističkom polinomijalnom vremenu s obzirom na veličinu modela, dakle, determinističkom eksponencijalnom vremenu s obzirom na $|\psi|$. Stoga je sveukupno algoritam eliminacije Hintikkinih skupova EXPTIME algoritam.

Kako bismo dokazali već najavljenu tvrdnju da je ispunjiva formula ψ ispunjiva na $\mathfrak{M}$, potrebne su nam dvije pomoćne tvrdnje: analogoni Leme o postojanju (lm. 6.6) i Leme o istinitosti (lm. 6.7).

Lema 9.4. *Neka je Σ konačan skup formula, a $\mathfrak{M} = (W, Q_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ model nastao eliminacijom Hintikkinih skupova. Za sve programe π, formule χ, i $H \in W$, ako* *je* $\langle\pi\rangle\chi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$*, onda je* $\langle\pi\rangle\chi \in H$ *ako i samo ako postoji* $H' \in W$ *takav da je* $H\, Q_\pi\, H'$ *i* $\chi \in H'$.

Dokaz. Ukoliko je $\langle\pi\rangle\chi \in H$, onda postoji $H' \in W$ takav da je $H\, Q_\pi\, H'$ i $\chi \in H'$. Naime, to slijedi iz činjenice da je H zadovoljavajući skup: jedino takvi ostanu na kraju eliminacije Hintikkinih skupova.

Obratnu tvrdnju dokazujemo indukcijom po strukturi programa π. Pretpostavimo da je a osnovni program, a H i H' skupovi takvi da je $H\, Q_a\, H'$ i $\chi \in H'$. Kako je relacija Q_a dobivena nizom restrikcija iz Q_a^0, slijedi $H\, Q_a^0\, H'$ pa iz definicije slijedi $\langle a\rangle\chi \in H$.

U koraku indukcije demonstriramo slučaj kad je π oblika ρ^*. (Ostali slučajevi su analogni, čak i lakši.) Neka su, dakle, H i H' Hintikkini skupovi takvi da je $H\, Q_{\rho^*}\, H'$ i $\chi \in H'$. Tada vrijedi $H\, (Q_\rho)^*\, H'$, što znači da postoji konačan niz $H_0, \ldots, H_n \in W$ takav da je $H_0 = H$, $H_n = H'$ i $H_i\, Q_\rho\, H_{i+1}$ za $0 \leqslant i < n$.

Podindukcijom po $m \leqslant n$ dokazujemo da je $\langle\rho^*\rangle\chi \in H_{n-m}$. Za $m = 0$ je $H_n = H'$ pa je $\chi \in H_n$. Iz uvjeta (vi) definicije Hintikkinog skupa tada slijedi $\langle\rho^*\rangle\chi \in H_n$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $m < n$, tj. da je $\langle\rho^*\rangle\chi \in H_{n-m}$. Iz $\langle\rho^*\rangle\chi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ slijedi $\langle\rho\rangle\langle\rho^*\rangle\chi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ pa zbog $H_{n-m-1} Q_\rho H_{n-m}$ i pretpostavke indukcije slijedi $\langle\rho\rangle\langle\rho^*\rangle\chi \in H_{n-m-1}$. Tad opet korištenjem uvjeta (vi) definicije Hintikkinog skupa zaključujemo da je $\langle\rho^*\rangle\chi \in H_{n-m-1}$. Time je podindukcija završena.

Za $m = n$ sad imamo da je $\langle\rho^*\rangle\chi \in H_0 = H$. Time je završena i glavna indukcija. □

Lema 9.5. *Neka je* Σ *konačan skup formula, a* $\mathfrak{M} = (W, Q_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ *model nastao eliminacijom Hintikkinih skupova. Za sve formule* $\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ *i sve* $H \in W$ *vrijedi*

$$\mathfrak{M}, H \Vdash \phi \textit{ ako i samo ako je } \phi \in H\,.$$

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule ϕ. Za propozicionalne varijable i konstantu $\perp$ (ukoliko se nalazi u $\neg\mathsf{FL}(\{\psi\})$) tvrdnja očito slijedi iz konstrukcije valuacije V i uvjeta (i) u definiciji Hintikkinog skupa. U koraku indukcije bulovski slučajevi slijede iz uvjeta (ii) i (iii). Ostaje slučaj kad je ϕ oblika $\langle\pi\rangle\chi$ za neki program π i formulu χ.

Ako je $\langle\pi\rangle\chi \in H$, prema prethodnoj lemi postoji $H' \in W$ takav da je $H\, Q_\pi\, H'$ i $\chi \in H'$. Po pretpostavci indukcije je $\mathfrak{M}, H' \Vdash \chi$ pa slijedi $\mathfrak{M}, H \Vdash \langle\pi\rangle\chi$.

Obrnuto, ako je $\mathfrak{M}, H \Vdash \langle\pi\rangle\chi$, onda postoji $H' \in W$ takav da je $H\, Q_\pi\, H'$ i $\mathfrak{M}, H' \Vdash \chi$. Po pretpostavci indukcije je $\chi \in H'$ pa iz prethodne leme slijedi $\langle\pi\rangle\chi \in H$. □

Teorem 9.6. *Problem ispunjivosti za* **PDL** *odlučiv je u determinističkom eksponencijalnom vremenu.*

Dokaz. Prisjetimo se, problem **PDL**-ispunjivosti je zapravo problem **PDL**-konzistentnosti, no s obzirom da je **PDL** adekvatna i slabo potpuna u odnosu na klasu R svih regularnih modela konačnog karaktera (prop. 8.4), svodi se na problem R-ispunjivosti. Dakle, moramo pokazati da za zadanu formulu ψ možemo u determinističkom eksponencijalnom vremenu odlučiti je li ispunjiva na R.

Neka je ψ zadana formula. Eliminacijom Hintikkinih skupova za $\Sigma = \{\psi\}$ konstruiramo model $\mathfrak{M} = (W, Q_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$. Već smo argumentirali da je konstrukcija ostvariva u determinističkom eksponencijalnom vremenu. Ostaje pokazati da za sve formule $\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ vrijedi

$$\phi \text{ je ispunjiva ako i samo ako postoji } H \in W \text{ takav da je } \phi \in H.$$

Pretpostavimo da za $\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ postoji $H \in W$ takav da je $\phi \in H$. Tada po prethodnoj lemi slijedi $\mathfrak{M}, H \Vdash \phi$. Drugim riječima, ϕ je ispunjiva upravo u stanju H modela $\mathfrak{M}$, koji je regularan model konačnog karaktera.

Obrnuto, neka je $\phi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ ispunjiva formula. Tada je ϕ konzistentna pa postoji MCS w takav da je $\phi \in w$. No to znači da se ϕ nalazi u atomu $A_w = w \cap \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$. Ostaje samo pokazati da je $A_w \in W$.

Pokazat ćemo i više, da je $At(\Sigma) \subseteq W$, tj. svaki atom „preživi" eliminaciju Hintikkinih skupova. To najlakše pokažemo tako se prisjetimo regularnog modela nad Σ, $\mathfrak{R}' = (At(\Sigma), R'_\pi, V')_{\pi\in\Pi}$ (def. 7.7 i napomena na kraju odlomka 7), tj. njegove redukcije na regularan model konačnog karaktera $\mathfrak{R} = (At(\Sigma), R_\pi, V)_{\pi\in\Pi}$ (kao u dokazu prop. 8.4). Indukcijom dokazujemo da za svaki $n \geqslant 0$ vrijedi $R_\pi \subseteq Q_\pi^n$ i $At(\Sigma) \subseteq W^n$.

Što se tiče baze indukcije, već smo vidjeli da je $At(\Sigma) \subseteq Hin(\Sigma) = W^0$. Pretpostavimo da vrijedi $A\, R_a\, B$ za atome A, B i osnovni program a. Tada je formula $\widehat{A} \wedge \langle a\rangle\widehat{B}$ konzistentna. Neka je χ formula takva da je $\langle a\rangle\chi \in \neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ i

$\chi \in B$. Kad ne bi bilo $\langle a\rangle\chi \in A$, bilo bi $\neg\langle a\rangle\chi \in A$. No onda bi iz konzistentnosti formule $\widehat{A}\wedge\langle a\rangle\widehat{B}$ slijedila konzistentnost formule $\neg\langle a\rangle\chi\wedge\langle a\rangle\chi$, što je kontradikcija. Prema tome, vrijedi $\langle a\rangle\chi \in A$. No to znači da je $AQ^0_a B$, tj. $R_a \subseteq Q^0_a$. Budući da su i R_π i Q^0_π za složene programe π izgrađene induktivno pomoću unije, kompozicije i refleksivnog tranzitivnog zatvorenja, slijedi da i za svaki $\pi \in \Pi$ vrijedi $R_\pi \subseteq Q^0_\pi$.

Pretpostavimo da za neki $n \geqslant 0$ vrijedi $At(\Sigma) \subseteq W^n$ i da za svaki $\pi \in \Pi$ vrijedi $R_\pi \subseteq Q^n_\pi$. Neka je $A \in At(\Sigma)$ i pretpostavimo da je $\langle\pi\rangle\chi \in A$. Iz leme 7.4 slijedi da postoji MCS w takav da je $A = A_w$. Iz Leme o postojanju (lm. 6.6) tada slijedi da postoji MCS v takav da je $R^{\mathsf{PDL}}_\pi wv$ i $\chi \in v$ (pritom je R^{PDL}_π relacija dostiživosti iz kanonskog modela za **PDL**). Iz činjenice da je regularan model nad Σ filtracija kanonskog modela kroz $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$ slijedi $A\,R_\pi\,A_v$. No tad je $A\,Q^n_\pi\,A_v$, a budući da vrijedi i $\chi \in A_v$, zaključujemo da je atom A zadovoljavajući Hintikkin skup. Dakle, $A \in W^{n+1}$. Zbog proizvoljnosti A je onda i $At(\Sigma) \subseteq W^{n+1}$. To odmah povlači $R_a \subseteq Q^{n+1}_a$ za sve osnovne programe a, dok ista inkluzija za složene programe π vrijedi zbog induktivne definicije relacija R_π i Q^{n+1}_π pomoću unije, kompozicije i refleksivnog tranzitivnog zatvorenja.

Na taj način smo indukcijom dokazali ono što nam je nedostajalo, da je $At(\Sigma) \subseteq W$. □

Uočimo za kraj još nekoliko činjenica vezanih uz model $\mathfrak{M}$. Prvo, osim što vrijedi $At(\Sigma) \subseteq W$, vrijedi i obrnuta inkluzija. Naime, iz leme 9.5 slijedi da za sve $H \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, H \Vdash H$. Prema tome, svaki $H \in W$ je ispunjiv na regularnom modelu (konačnog karaktera), a prema tome i konzistentan. Dakle, jedino atomi „prežive" eliminaciju Hintikkinih skupova te je $\mathfrak{M}$, kao i regularan model nad Σ, također jedan model nad skupom $At(\Sigma)$.

Drugo, pogledajmo model $M^f = (W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}, Q^f_\pi, V^f)$. Pritom je $W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}$ skup „filtriranih" stanja kanonskog modela za **PDL**, kao u definiciji 7.7 regularnog modela nad Σ. Za osnovni program a stavimo da je $Q^f_a = R^l_a$, pri čemu je R^l_a relacija iz najveće filtracije nad $W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}$, kao u lemi 4.4. Za složene programe π relacije dostiživosti Q^f_π definiramo induktivno pomoću unije, kompozicije i refleksivnog tranzitivnog zatvorenja. Valuaciju V^f definiramo s $V^f(p) = \{|w| \mid p \in w\}$ za sve propozicionalne varijable p.

Korištenjem bijekcije s $W_{\neg\mathsf{FL}(\Sigma)}$ na $At(\Sigma)$ dane s $|w| \mapsto A_w$ jednostavno se vidi da je $\mathfrak{M}^f$ izomorfan modelu čija je $\mathfrak{M}$ redukcija na regularan model konačnog karaktera. Nadalje, iz dokaza prethodnog teorema jasno je da je $R_\pi^f \subseteq Q_\pi^f$ (pri čemu je R_π^f relacija dostiživosti iz regularnog modela nad Σ gledanog kao na filtraciju kanonskog modela). Analogno kao u dokazu propozicije 7.10 vidi se i da je $Q_\pi^f \subseteq R_\pi^l$ za sve programe π. Stoga iz leme 4.4 slijedi da je i $\mathfrak{M}^f$ filtracija kanonskog modela kroz skup $\neg\mathsf{FL}(\Sigma)$.

POGLAVLJE 4

Umjesto zaključka

U ovom diplomskom radu dokazana su osnovna svojstva logike **PDL**: adekvatnost i potpunost u odnosu na klasu regularnih okvira, odlučivost i EXPTIME-potpunost problema **PDL**-ispunjivosti. Umjesto zaključka iznosimo što bi dalje bilo zanimljivo istražiti te sumiramo neke rezultate.

Primjerice, mogli bismo promatrati razne varijante propozicionalne dinamičke logike koje nastaju izmjenama na sintaktičkoj i semantičkoj razini. Na sintaktičkoj razini jezik propozicionalne dinamičke logike možemo obogatiti novim konstruktorima programa: testom, presjekom i obratom. Na semantičkoj razini bismo mogli dodati ograničenja na relacije dostiživosti pa, primjerice, promatrati samo relacije koje su parcijalne funkcije. U odlomku 10 razmatramo što se dogodi pri uvođenju ovakvih izmjena.

U odlomku 11 spominjemo jedan otvoreni problem vezan za **PDL**: problem Craigove interpolacije. Jedan od razloga zašto bi bilo zanimljivo znati ima li **PDL** svojstvo Craigove interpolacije je veza s Bethovim svojstvom definabilnosti. Definiramo ta dva svojstva i iznosimo neke djelomične rezultate vezane uz njih.

10 Varijante **PDL**

Logika **PDL** o kojoj smo dosad govorili često se naziva regularna propozicionalna dinamička logika. Razlog je taj što su programski konstruktori $\cup$, $\circ$ i $*$ isti oni koji se koriste u teoriji formalnih jezika za konstrukciju regularnih izraza[1]. No,

[1] Pogledati [19, str. 63].

razmatraju su i drugi programski konstruktori od kojih ćemo ovdje spomenuti tri: *test*, *obrat* i *presjek*. Spomenut ćemo i semantičku modifikaciju koja nastaje zahtjevom da su relacije dostiživosti regularnog modela za osnovne programe parcijalne funkcije. Rezultati koje ovdje iznosimo preuzeti su iz preglednog članka [1] koji sadrži i reference na dokaze.

Ideja testa je s jedne strane prirodna, a s druge strane pomalo neobična. Prirodno je to da želimo imati neki programski konstruktor za kontrolu toka, kao što je to uobičajeno u bilo kojem programskom jeziku. Neobična je sama sintaktička izvedba, barem u odnosu na dosad viđene programske konstruktore. Naime, test nam omogućuje da napravimo program od formule: ako je ϕ formula, $\phi?$ je program.

Intuitivna interpretacija programa $\phi?$ je „ako je ϕ istinita, nastavi, inače stani". Konkretnije, modalni operator $\langle \phi? \rangle$ pristupa trenutnom stanju i ispituje je li ϕ istinita na njemu. Ako gledamo ovaj operator sam za sebe, onda $\langle \phi? \rangle \psi$ znači isto što i $\phi \wedge \psi$. Međutim, u kombinaciji s ostalim programskim konstruktorima možemo izgraditi programe poput:

- (**if** ϕ **then** π **else** ρ): $((\phi? \circ \pi) \cup (\neg\phi? \circ \rho))$,
- (**while** ϕ **do** π): $((\phi? \circ \pi)^* \circ \neg\phi?)$,
- (**repeat** π **until** ϕ): $(\pi \circ ((\neg\phi? \circ \pi)^* \circ \phi?))$.

U skladu s intuitivnim idejama, htjeli bismo prilagoditi koncept regularnog modela kako bi se i operator $\langle \phi? \rangle$ ponašao na željeni način. Zato za odgovarajuću relaciju $R_{\phi?}$ modela $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$ zahtijevamo:

$$R_{\phi?} = \{(w, v) \in W^2 \mid w = v \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi\}.$$

Primijetimo da je za ovakav zahtjev na relaciju dostiživosti potrebna informacija o istinitosti formule, tj. potrebna nam je valuacija. Zato ga ne možemo izraziti na razini okvira, nego samo na razini modela. Posljedica toga je i da sve rezultate izražavamo u terminima modela i globalne istinitosti umjesto u terminima okvira i valjanosti.

Postavlja se pitanje možemo li za klasu ovakvih „prilagođenih" regularnih modela dati sintaktičku karakterizaciju. Odgovor je da. Naime, jednostavno na listu aksioma za **PDL** iz definicije 2.5 dodamo sljedeću shemu:

$$\langle \phi? \rangle p \leftrightarrow \phi \wedge p.$$

Dobivenu minimalnu normalnu logiku označimo s **PDL**-test. Dokaz adekvatnosti i slabe potpunosti u suštini je isti kao dokaz adekvatnosti i slabe potpunosti za **PDL**, potrebne su samo manje izmjene (npr. u definiciji Fischer-Ladnerovog zatvorenja potreban je dodatan uvjet i slično).

Što se tiče problema ispunjivosti za **PDL**-test, također nema značajnije razlike u odnosu na problem ispunjivosti za **PDL**. I jedan i drugi su EXPTIME-potpuni.

Napomenimo još i da test doista unosi veću izražajnost. Naime, može se pokazati da za formulu

$$\langle \textbf{repeat } \pi \textbf{ until } \neg p \rangle \langle \pi \rangle p$$

ne postoji ekvivalentna formula u jeziku propozicionalne dinamičke logike bez testa.

Sljedeći programski konstruktor koji se može razmatrati je *obrat* (engl. *converse*): ako je π program, onda je i π^- program. Malo je teže dati intuitivnu interpretaciju za π^- pa odmah dajemo zahtjev na odgovarajuću relaciju dostiživosti R_{π^-}:

$$R_{\pi^-} = (R_\pi)^{-1} = \{(w, v) \in W^2 \mid (v, w) \in R_\pi\}.$$

Dakle, obrat nam omogućuje da izražavamo činjenice o prethodnim stanjima do kojih bismo mogli doći izvršavanjem programa unatrag.

Odgovarajuću adekvatnu i slabo potpunu sintaktičku karakterizaciju dobijemo tako da na listu aksioma za **PDL** dodamo sljedeće dvije sheme:

$$p \to [\pi]\langle \pi^- \rangle p,$$
$$p \to [\pi^-]\langle \pi \rangle p.$$

Dobivenu minimalnu normalnu modalnu logiku označimo s **CPDL**.

Složenost problema ispunjivosti za **CPDL** također se ne izmijeni na nikakav bitan način. Problem i dalje pripada klasi EXPTIME-potpunih problema.

Što se tiče izražajnosti, **CPDL** ima veću izražajnost od **PDL**-test, a time i od **PDL**. Naime, promotrimo formulu $\langle a^- \rangle \top$ za osnovni program a i modele $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$ i $\mathfrak{M}' = (W', R'_\pi, V')_{\pi \in \Pi}$ pri čemu je $W = \{x, y\}$, $W' = \{y'\}$, $R_a =$

$\{(x,y)\}$, $R'_a = \varnothing$. Za valuacije je bitno da se y i y' slažu u istim propozicionalnim varijablama. Primjerice, možemo staviti $V(p) = V'(p) = \varnothing$ za sve $p \in \Phi$.

Indukcijom se lako pokaže da se y i y' slažu u svim formulama jezika propozicionalne dinamičke logike bez obrata. Međutim, očito vrijedi $\mathfrak{M}, y \Vdash \langle a^- \rangle \top$, dok je $\mathfrak{M}', y' \nVdash \langle a^- \rangle \top$. Dakle, za $\langle a^- \rangle \top$ ne postoji ekvivalentna formula u jeziku propozicionalne dinamičke logike bez obrata.

Zadnji programski konstruktor koji navodimo je *presjek*: ako su π_1 i π_2 programi, onda je i $\pi_1 \cap \pi_2$ program. Intuitivno, $\pi_1 \cap \pi_2$ paralelno izvodi oba programa.

Na prvi pogled ovo je slično konstruktoru unije. To se očituje i na zahtjevu na relaciju dostiživosti $R_{\pi_1 \cap \pi_2}$:

$$R_{\pi_1 \cap \pi_2} = R_{\pi_1} \cap R_{\pi_2}.$$

Međutim, konstruktor presjeka je bitno različit od svih dosad opisanih programskih konstruktora. Označimo s **IPDL** logiku klase regularnih modela s navedenim dodatnim zahtjevom.

Prvo što valja primijetiti je da zahtjev na relaciju dostiživosti za presjek ne možemo definirati formulom analognom formulama za kompoziciju i uniju iz definicije 2.5. Naime, ako je $\mathfrak{M}$ regularan model s dodatnim zahtjevom za presjek, onda za sve programe $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ i formule ϕ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \Vdash \langle \pi_1 \cap \pi_2 \rangle \phi \to (\langle \pi_1 \rangle \phi \wedge \langle \pi_2 \rangle \phi).$$

No, obratna formula nije globalno istinita na ovakvim okvirima. To se lako vidi ako uzmemo model $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$ za koji je $W = \{x, y, z\}$. Za osnovne programe a, b stavimo $R_a = \{(x,y)\}$ i $R_b = \{(x,z)\}$, što povlači $R_{a \cap b} = \varnothing$. Valuacija je proizvoljna. Tada vrijedi

$$\mathfrak{M}, x \Vdash \langle a \rangle \top \wedge \langle b \rangle \top \quad \text{i} \quad \mathfrak{M}, x \nVdash \langle a \cap b \rangle \top.$$

Možemo se zapitati postoji li uopće aksiomatizacija za **IPDL**. Odgovor je da, a za detalje se može pogledati [1] i referenca koja je tamo dana.

Sljedeća bitna razlika je ta što **IPDL** ne posjeduje svojstvo konačnog modela. Naime, promotrimo formulu $\varphi \equiv [\pi^*](\langle \pi \rangle \top \wedge [\pi^+ \cap \top?]\bot)$, pri čemu smo s π^+ označili program $\pi \circ \pi^*$. Jednostavno se provjeri da ta formula izražava da u modelu postoji niz stanja $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ takav da:

- za sve $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $w_i\, R_\pi\, w_{i+1}$,
- ni za jedan $i \in \mathbb{N}$ ne postoji R_π-ciklus koji počinje u w_i.

Pritom je R_π-ciklus niz stanja $v_0, v_1, \ldots, v_n$ takav da je $n > 0$, $v_j R_\pi v_{j+1}$ za $0 \leqslant j < n$ i $v_0 = v_n$. Nepostojanje R_π-ciklusa osigurava da su svi w_i međusobno različiti, što znači da je φ ispunjiva isključivo na beskonačnim modelima. (Ispunjiva svakako jest, primjerice na modelu s nosačem $\mathbb{N}$ i relacijom $R_\pi = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$.)

Činjenica da **IPDL** ne posjeduje svojstvo konačnog modela onemogućuje korištenje tehnika iz ovog diplomskog rada za analizu problema **IPDL**-ispunjivosti. Štoviše, pitanja vezana za složenost tog problema su donedavno bila otvorena. U članku [14] ustanovljeno je da je problem ispunjivosti za **IPDL**-test (uključeni su i test i presjek) EXPSPACE-težak, a kasnije je dana i donja ograda determinističkog dvostrukog eksponencijalnog vremena za problem **IPDL**-ispunjivosti (odgovarajuću klasu složenosti označavamo s 2EXPTIME). Zajedno s rezultatom poznatim otprije, da se ispunjivost za **IPDL**-test nalazi u klasi 2EXPTIME, time je riješeno pitanje složenosti ovih problema. Nadalje, ako uključimo sva tri dodatna programska konstruktora, dobijemo logiku **ICPDL**-test. U članku [8] ustanovljeno je da je i ispunjivost za **ICPDL**-test 2EXPTIME-potpun problem.

Zadnju varijantu logike **PDL** koju spominjemo dobijemo tako da zahtjevu regularnosti modela dodamo i zahtjev da su relacije dostiživosti za osnovne programe parcijalne funkcije. Preciznije, ako je a osnovni program te ako su w, v, u stanja u modelu, onda

$$R_a wv \text{ i } R_a wu \text{ povlači } v = u.$$

Logiku klase takvih modela označimo s **DPDL**, pri čemu **D** dolazi od interpretacije da se sad osnovni programi ponašaju deterministički. Regularne modele koji zadovoljavaju navedeni zahtjev zovemo deterministički regularni modeli.

Sintaktičku karakterizaciju logike **DPDL** dobijemo tako da na listu aksioma iz definicije 2.5 dodamo sljedeću shemu:

$$\langle \pi \rangle p \to [\pi] p.$$

Nadalje, postoje rezultati koji uspostavljaju EXPTIME-potpunost problema ispunjivosti za **DPDL**.

Činjenica da se ništa značajno ne pokvari ograničavanjem na determinističke regularne modele mogla bi nas navesti na misao da je determinizam bezazlen zahtjev. Međutim, determinističke verzije raznih sintaktičkih varijanti logike **PDL** ili nisu aksiomatizabilne, ili imaju neodlučiv problem ispunjivosti. Konkretno, deterministička verzija logike **IPDL** ima neodlučiv problem ispunjivosti.

11 Craigova interpolacija i Bethovo svojstvo

Za kraj ostaje spomenuti jedan otvoreni problem vezan za logiku **PDL**. Označimo s $var(\phi)$ skup propozicionalnih varijabli koje nastupaju u formuli ϕ.

Definicija 11.1 (Craigova interpolacija)**.** Normalna modalna logika Λ ima *svojstvo Craigove interpolacije* ako za svaki par formula ϕ i ψ za koje vrijedi $\phi \vdash_\Lambda \psi$ postoji formula χ takva da je $var(\chi) \subseteq var(\phi) \cap var(\psi)$ te da vrijedi $\phi \vdash_\Lambda \chi$ i $\chi \vdash_\Lambda \psi$.

Iako na prvi pogled izgleda prilično tehničko i nezanimljivo, svojstvo Craigove interpolacije je važno svojstvo koje logika može imati. Ono se razmatra i u klasičnoj matematičkoj logici. Jedan članak o pogledima na interpolaciju je [3]. Mi ćemo istaknuti vezu Craigove interpolacije s tzv. Bethovim svojstvom, također jednim klasičnim svojstvom kojeg razmatramo u okvirima modalne logike, a koje govori o implicitnim i eksplicitnim definicijama propozicionalnih varijabli.

Napomena u vezi notacije: ako želimo naglasiti da je $var(\phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$, pišemo $\phi(p_1, \dots, p_n)$, ili kraće $\phi(\vec{p})$ pri čemu je $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

Eksplicitna definicija propozicionalne varijable p je formula oblika $\chi \leftrightarrow p$, pri čemu $p \notin var(\chi)$. Implicitna definicija je formula $\phi(p, \vec{q})$ čija istinitost u stanju w modela iz neke klase modela na jedinstven način određuje istinitost varijable p u istom stanju. Ovo možemo reformulirati i sintaktički. U normalnoj modalnoj logici Λ formula $\phi(p, \vec{q})$ implicitno definira p ako vrijedi:

$$\{\phi(p, \vec{q}), \phi(r, \vec{q})\} \vdash_\Lambda p \leftrightarrow r.$$

Pritom je $\phi(r, \vec{q})$ dobivena iz $\phi(p, \vec{q})$ uniformnom supstitucijom p u r.

Definicija 11.2 (Bethovo svojstvo)**.** Normalna modalna logika Λ ima *Bethovo svojstvo* ako vrijedi sljedeće. Pretpostavimo da je $\phi(p, \vec{q})$ formula za koju vrijedi

$$\{\phi(p, \vec{q}), \phi(r, \vec{q})\} \vdash_\Lambda p \leftrightarrow r.$$

Tada postoji formula $\chi(\vec{q})$ koja ne sadrži varijablu p i za koju vrijedi

$$\phi(p, \vec{q}) \vdash_\Lambda p \leftrightarrow \chi(\vec{q}).$$

Drugim riječima, Bethovo svojstvo kaže da ako možemo propozicionalnu varijablu p implicitno definirati, onda je možemo i eksplicitno definirati. Primijetimo da obrat tog svojstva uvijek vrijedi. Naime, ako je $\phi(p, \vec{q}) \vdash_\Lambda p \leftrightarrow \chi(\vec{q})$, onda je i $\phi(r, \vec{q}) \vdash_\Lambda r \leftrightarrow \chi(\vec{q})$ pa svakako vrijedi

$$\{\phi(p, \vec{q}), \phi(r, \vec{q})\} \vdash_\Lambda p \leftrightarrow r.$$

Zapravo, obrat Bethovog svojstva je općenito poznat kao Padoaova metoda, a koristi se kad želimo dokazati da se neka propozicionalna varijabla ne može eksplicitno definirati.

Veza Bethovog svojstva sa svojstvom Craigove interpolacije dana je sljedećim teoremom:

Teorem 11.3 (Maksimova)**.** *Neka je* Λ *normalna modalna logika. Tada* Λ *ima svojstvo Craigove interpolacije ako i samo ako ima Bethovo svojstvo.*

Dokaz. [13, str. 139–141]. □

Problem koji još uvijek odolijeva pokušajima rješavanja je odgovoriti ima li **PDL** svojstvo Craigove interpolacije (a onda i Bethovo svojstvo). Generalno prevladava mišljenje da je odgovor potvrdan i bilo je već nekoliko dokaza za koje se pokazalo da su pogrešni. Ističemo [11, 12].

U knjizi [13] istaknuto je nekoliko djelomičnih rezultata. Jedan od njih je sljedeći:

Teorem 11.4. PDL *ima svojstvo Craigove interpolacije ako i samo ako ga ima* **PDL**-test*.*

Dokaz. [13, str. 525–526]. □

Bibliografija

[1] P. Balbiani, Propositional Dynamic Logic, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*, `http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/logic-dynamic/`

[2] S. Balenović, *Teorija korespondencije*, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2005.

[3] J. van Benthem, The many faces of interpolation, *Synthese*, vol. 164, pp. 451–460, 2008.

[4] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002.

[5] J. Broersen, Relativized Action Complement for Dynamic Logic, *Advances in Modal Logic*, vol. 4, pp. 51–69, 2003.

[6] B. S. Chlebus, Domino-tiling games, *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 32, pp. 374–392, 1986.

[7] M. Fischer, R. Ladner, Propositional dynamic logic of regular programs, *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 18, pp. 194–211, 1979.

[8] S. Göller, M. Lohrey, C. Lutz, PDL with intersection and converse: satisfiability and infinite-state model checking, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 74, pp. 279–314, 2009.

[9] M. Hollenberg, Equational axioms of test algebra, Logic Group Preprint Series 172, Utrecht University, Utrecht, 1996.

[10] D. Kiraly, *Modalna logika*, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2004.

[11] M. Kowalski, PDL has interpolation, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 67, pp. 933–946, 2002.

[12] M. Kowalski, Retraction note for "PDL has interpolation", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 69, p. 935, 2004.

[13] M. Kracht, *Tools and Techniques in Modal Logic*, Elsevier, 1999.

[14] M. Lange, A Lower Complexity Bound for Propositional Dynamic Logic with Intersection, *Advances in Modal Logic*, vol. 5, pp. 133–147, 2005.

[15] L. A. Nguyen, On the Deterministic Horn Fragment of Test-free PDL, *Advances in Modal Logic*, vol. 6, pp. 373–392, 2006.

[16] T. Perkov, *Sahlqvistove formule*, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2006.

[17] V. Pratt, Semantical considerations on Floyd-Hoare logic, *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 109–121, 1976.

[18] M. de Rijke, A system of dynamic modal logic, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 27, pp. 109–142, 1998.

[19] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 2. izdanje, Thomson Course Technology, 2006.

[20] H. Škrapec, *Potpunost u normalnoj modalnoj logici*, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2007.

[21] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2007.

[22] M. Vuković, *Matematička logika 1*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2007.

[23] F. Wolter, M. Zakharyaschev, Dynamic Description Logics, *Advances in Modal Logic*, vol. 2, pp. 449–463, 2001.